

Р. ГРЭХЕМ

# НАЧАЛА ТЕОРИИ РАМСЕЯ

Москва «Мир»



Conference Board of the Mathematical Sciences  
*Regional Conference Series in Mathematics*

supported by the  
National Science Foundation

Number 45

**RUDIMENTS OF RAMSEY THEORY**

by  
**RONALD L. GRAHAM**

Published for the  
Conference Board of the Mathematical Sciences  
by the  
American Mathematical Society  
Providence, Rhode Island

1981

---

**Р. ГРЭХЕМ**

---

**НАЧАЛА ТЕОРИИ  
РАМСЕЯ**

---

Перевод с английского  
Б. С. СТЕЧКИНА

под редакцией  
С. М. ВОРОНИНА

Москва «Мир»

---

1984

Грэхем Р.

Г 98 Начала теории Рамсея: Пер. с англ.— М.: Мир, 1984.— 96 с., ил.

Книга написана крупным американским математиком и отражает современные достижения в теории Рамсея, имеющей важные приложения в различных областях математики (теория множеств, логика, теория групп, вычислительная математика и др.). Изложение ведется в строгой и доступной форме, каждая глава сопровождается упражнениями, задачами, приведены открытые проблемы. Для специалистов по комбинаторике, аспирантов и студентов университетов.

Г  $\frac{1702070000-173}{041(01)-84}$  36—84, ч. 1

ББК 22.174  
517.8

*Редакция литературы по математическим наукам*

Рональд Л. Грэхем

НАЧАЛА ТЕОРИИ РАМСЕЯ

Научный редактор И. А. Махлова  
Младший научный редактор И. В. Герасимова  
Художник В. Е. Карпов  
Художественный редактор В. И. Шаповалов  
Технический редактор Л. П. Ермакова  
Корректор М. А. Смирнов

ИБ № 3785

Сдано в набор 04.07.83. Подписано к печати 24.02.84. Формат 60×90<sup>1/16</sup>. Бумага типографская № 2. Гарнитура литературная. Печать высокая. Объем 3,00 бум. л. Усл. печ. л. 6,00. Усл. кр.-отт. 6,50. Уч.-изд. л. 5,57. Изд. № 1/2922. Тираж 4000 экз. Зак. 706. Цена 85 коп.

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»

129820, Москва, И-110, ГСП, 1-й Рижский пер., 2

Ленинградская типография № 2 головное предприятие ордена Трудового Красного Знамени Ленинградского объединения «Техническая книга» им. Евгении Соколовой Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР по делам издательства, полиграфии и книжной торговли. 198052, г. Ленинград, Л-52, Измайловский проспект, 29.

© American Mathematical Society, 1981

© Перевод на русский язык с дополнениями, «Мир», 1984

# О теории Рамсея

В сущности, во многих разделах математики используются комбинаторные соображения, однако они не всегда излагаются одинаково четко. Нас не оставляет робкая надежда, что систематический анализ комбинаторных соображений приведет к повышению их полезности, по крайней мере к усовершенствованию доказательств. В этом отношении примечательна судьба принципа Дирихле.

Принцип Дирихле излагают обычно в терминах размещений и оттого именуют иногда принципом ящиков:

*При любом размещении  $(n + 1)$  объектов по  $n$  ящикам найдется ящик с двумя объектами.*

Если существенно наличие  $k$  предметов в одном ящике, то принцип формулируется так:

*При любом размещении  $(rk - r + 1)$  объектов по  $r$  ящикам найдется  $k$  объектов в одном ящике.*

Принцип Дирихле тривиален, но полезен: многие теоремы, его использующие, фундаментальны, например теорема Эйлера — Ферма, теорема самого Дирихле, теорема Матиясевича, наконец, теорема Рамсея.

Теорема Рамсея — это нетривиальное обобщение принципа Дирихле; рамки ее полезности расширяются, охватывая и чисто практические ситуации. Это приводит к самостоятельной теории. Суть ее — проследить взаимосвязь единого и разделенного.

*Если большая структура разбивается на непересекающиеся части, то наличие какой подструктуры можно гарантировать в одной из частей? Обратно — сколь богатой должна быть большая структура, чтобы любое ее разбиение содержало часть предписанной природы?*

Книга Рональда Грэхема, видного специалиста не только в этой области, но и во многих разделах прикладной математики и механики, знакомит с началами и насущными вопросами этой теории. Мы стремились сохранить живой и образный язык автора. С его любезного согласия настоящее издание снабжено двумя дополнениями.

С. Воронин

Б. Стечкин

# Предисловие

Не будет преувеличением сказать, что последние 10 лет отмечены ярким всплеском активности в области общей комбинаторики. Внутри этой области один конкретный объект подвергся особенно интенсивному развитию. Объект этот есть теория Рамсея — предмет настоящих заметок, которые написаны на основе лекций, прочитанных автором на региональной конференции Колледжа св. Улава в июне 1979 г. Цель этих лекций состояла в том, чтобы развить навыки, необходимые для понимания недавних достижений в теории Рамсея. В соответствии со стилем самих лекций заметки неформальны, однако большинство представленных результатов сопровождается полными доказательствами. Кроме того, много полезных фактов можно найти в упражнениях и задачах.

Мне хочется поблагодарить всех участников конференции за создание стимулирующей атмосферы, столь ценной на собраниях такого рода. В частности, с особенной благодарностью я обращаюсь к Ф. Абрамсону, Л. Бейнеке, Т. Брауну, С. Бурру, Ф. Чжан, Л. Лесняку, Дж. Миллсу, М. Натансону, Дж. Полу, Дж. Селфриджу за их яркие дополнительные лекции по отдельным аспектам теории Рамсея. Критические замечания Т. Брауна, С. Бурра и М. Хаймана по некоторым фрагментам текста оказались весьма полезными. Наконец, эта конференция состоялась лишь благодаря прекрасной организации и радушному гостеприимству Р. Аллена и К. Корцатта (и поддержке Национального научного фонда).

*Добавлено в корректуру.* С момента выхода этой монографии в 1981 г. теория Рамсея развивалась еще более быстрыми темпами. Ряд направлений обогатился серьезными результатами: это бесконечные двойственные формы многих классических теорем, полученные Карлсоном и Симпсоном; результаты Бека, Атья, Комлоша, Семерди и др. по рамсеевской теории графов; Дьюбера, Промеля и Войта по каноническим разбиениям и новые независимые результаты Кетонена, Соловоя и Фридмана. Краткий обзор этих и более поздних работ можно найти в моей статье «Recent Development in Ramsey Theory», Proc. Inter. Congress of Math., Warsaw, North-Holland.

# Введение

Грубо говоря, теория Рамсея — это ветвь комбинаторики, имеющая дело со структурами, которые сохраняются под действием разбиений. Типичен для нее следующий вопрос: если конкретная структура (например, алгебраическая, комбинаторная или геометрическая) произвольным образом разбивается на конечное количество классов, то наличие какого рода подструктур всегда можно гарантировать по крайней мере в одном из этих классов? Вот три конкретных примера.

1. При любом разбиении множества всех целых чисел на конечное количество классов некоторый класс всегда содержит сколь угодно длинную арифметическую прогрессию (теорема ван дер Вардена).

2. Для каждого разбиения множества всех  $k$ -элементных подмножеств бесконечного множества  $S$  на конечное количество классов найдется некоторое бесконечное подмножество этого  $S$  со всеми *своими*  $k$ -элементными подмножествами, лежащими в одном классе (теорема Рамсея).

3. При любом разбиении точек плоскости на конечное число классов некоторый класс содержит прямоугольный треугольник площади 1.

В течение лишь нескольких последних лет в области рамсеевской теории получен ряд эффектных результатов, таких, как работа Семереди и Фюрстенберга, разрешившая примечательную гипотезу Эрдеша и Турана (о том, что множество целых без  $k$ -членной арифметической прогрессии имеет плотность 0), теоремы Нешетриля — Рёдля, результаты Пёриса и Харрингтона о «больших» рамсеевских числах и неразрешимости арифметики Пеано первого рода, решение Дьюбером старой гипотезы Радо, неожиданное обобщение Хиндманом теоремы Шура и положительное разрешение Грэхемом, Либом и Росчайлдом гипотезы Рота об аналоге теоремы Рамсея для векторных пространств. Итак, становится бесспорным, что идеи и техника теории Рамсея связываются со все более широким кругом математических областей, пересекаясь в весьма существенных местах с элементами теории множеств, теории графов, комбинаторной теории чисел, теории вероятностей, анализа и даже вычислительной и машинной математики.

Цель этих заметок — заложить фундамент, на котором базируется большинство из последних работ; многие из рассматриваемых здесь результатов более детально изложены в недавней монографии «Теория Рамсея» Грэхема, Росчайлда и Спенсера [GRS], материал ряда разделов которой я свободно заимствовал, когда это представлялось уместным. С другой стороны, отдельные приведенные здесь результаты и доказательства, по-видимому, не встречались ранее в литературе.



# ТРИ ВЗГЛЯДА НА ТЕОРИЮ РАМСЕЯ

Существует несколько точек зрения, от которых можно отталкиваться при изучении различных классов рамсеевских теорем; отметим некоторые из них.

Пусть  $(S, <)$  — частично упорядоченное множество (конечное) с единственным минимальным элементом 0. Будем говорить, что  $S$  градуированное, если для каждого  $x \in S$  все максимальные цепи от  $x$  к 0 имеют одну и ту же длину; в этом случае такую длину называем рангом  $x$  и обозначаем через  $\rho(x)$ . Множество всех элементов ранга  $k$  из  $S$  обозначаем через  $\left[ \begin{smallmatrix} S \\ k \end{smallmatrix} \right]$ .

*Примеры.* (a)  $S = 2^{[n]}$  — совокупность всех подмножеств множества  $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$ , упорядоченных по включению;  $\rho(x) = |x|$  — мощность  $x \in S$ .

(b)  $S$  — множество всех подпространств данного  $n$ -мерного векторного пространства  $V$  над фиксированным конечным полем  $GF(q)$ , упорядоченное по включению;  $\rho(x)$  — размерность  $x \in S$ .

(c)  $S$  — совокупность всех разбиений множества  $[n]$ , упорядоченных по склейке блоков; для разбиения вида  $x = B_1 \cup \dots \cup B_k$  имеем  $\rho(x) = n - k$ .

Пусть  $(S_n, <) = \mathcal{P}$ ,  $n \in \omega$ , — последовательность градуированных частично упорядоченных множеств. Говорят, что  $\mathcal{P}$  обладает рамсеевским свойством, если для любых <sup>1)</sup>  $k, l, r \in \omega$  существует  $n$ , такое, что если элементы  $S_n$  ранга  $k$  произвольно разбиваются на  $r$  классов, то всегда найдется элемент  $y \in S_n$  ранга  $l$ , такой, что все элементы ранга  $k$  вида  $x \in S_n$  и  $x < y$  принадлежат одному из этих  $r$  классов. Более формально:

$$\forall k, l, r \in \omega \exists n: \forall \lambda: \left[ \begin{smallmatrix} S_n \\ k \end{smallmatrix} \right] \rightarrow [r] \exists y \in \left[ \begin{smallmatrix} S_n \\ l \end{smallmatrix} \right], i \in [r]:$$

$$\left\{ x \in \left[ \begin{smallmatrix} S_n \\ k \end{smallmatrix} \right] : x < y \right\} \subseteq \lambda^{-1}(i).$$

<sup>1)</sup> Обычно случаи  $k = 0$ ,  $l = 0$  и  $r = 0$  мы опускаем как очевидно выполняющиеся.

Читателю предлагается просмотреть это утверждение для различных семейств  $\mathcal{P}$ , например состоящих из множеств  $S_n = S$ , где  $S$  — множества из примеров (a), (b), (c). Доказательства рамсеевости этих частных случаев будем рассматривать в последующих разделах.

Для изложения иной точки зрения рассмотрим двудольный граф  $G$  с множествами вершин  $A$  и  $B$  и множеством ребер  $E \subseteq A \times B$ . Говорят, что  $G$  является  $r$ -рамсеевским, если для всех отображений  $\lambda: B \rightarrow [r]$  найдется вершина  $x \in A$ , такая, что для некоторого  $i \in [r]$  справедливо включение  $\{y \in B: (x, y) \in E\} \subseteq \lambda^{-1}(i)$ . Многие из рамсеевской теории можно свести к вопросу о том, является ли конкретный граф  $r$ -рамсеевским.

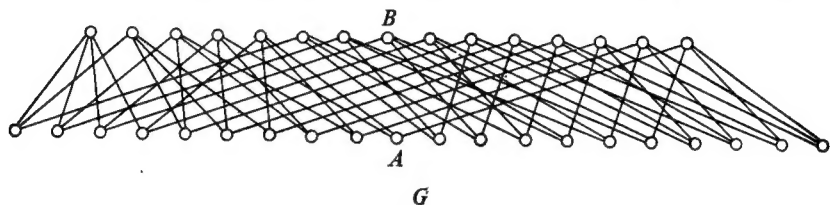


Рис. 1.1.

Однако, будучи концептуально простой, эта формулировка не многое привносит в решение конкретных задач теории Рамсея. Быть может, причина кроется в ее общности, из-за которой структуры конкретных изучаемых проблем ускользают из нашего поля зрения. Для иллюстрации рассмотрим двудольный граф  $G$  на рис. 1.1.

Понятно, что он 2-рамсеев, но прямая проверка этого потребует перебора всех  $2^{20}$  отображений  $\lambda: B \rightarrow [2]$ . В действительности  $G$  — это граф, полученный (подходящим) отождествлением  $A$  и  $B$  с множествами соответственно всех 3- и всех 2-элементных подмножеств множества  $[6]$ , в котором наличие ребра между  $x \in A$  и  $y \in B$  эквивалентно тому, что  $y \subset x$ . В этой интерпретации факт 2-рамсеевости графа  $G$  становится совершенно прозрачным.

**Упражнение 1.1.** (a) Проверьте 2-рамсеевость графа  $G$ . (b) Сохранится ли 2-рамсеевость  $G$ , если из множества  $A$  удалить одну вершину (две вершины)?

Последняя из рассматриваемых нами точек зрения связана с гиперграфами. Под гиперграфом  $\mathcal{H} = \mathcal{H}(V, E)$  мы понимаем множество  $V$  вместе с семейством  $E$  из по крайней мере 2-элементных подмножеств этого множества  $V$ . Хроматическое число гиперграфа  $\mathcal{H}$  обозначается через  $\chi(\mathcal{H})$  и определяется как наименьшее целое  $t$ , при котором существует отображение

$\lambda: V \rightarrow [t]$ , такое, что нет ребра  $e \in E$  и  $i \in [t]$  со свойством  $e \subseteq \lambda^{-1}(i)$ . Термин «хроматическое» возник из следующей интерпретации. Мы представляем отображение  $\lambda$  как приписывание цвета вершинам гиперграфа  $\mathcal{H}$ . Если все точки некоторого ребра  $e \in E$  получают один и тот же цвет, то говорим, что  $e$  монохроматично<sup>1)</sup> и записываем:  $e$  — топо  $\chi$ . Таким образом,  $\chi(\mathcal{H}) = t$ , если  $t$  — наименьшее целое, для которого существует  $t$ -раскрашивание множества  $V$  без монохроматических ребер  $e \in E$ .

Нетрудно увидеть связь между  $t$ -хроматичностью гиперграфа  $\mathcal{H}$  и  $(t-1)$ -рамсеевостью соответствующим образом построенного двудольного графа  $G = G(\mathcal{H})$ .

Существенным инструментом, который довольно часто используется в теории Рамсея, является один из вариантов теоремы компактности де Бройна и Эрдёша [BrE]. Ее формулировку предварим еще одним определением. Гиперграф  $\mathcal{G} = \mathcal{G}(V', E')$  называется подгиперграфом гиперграфа  $\mathcal{H}(V, E)$ , если  $V' \subseteq V$  и  $E' \subseteq E$ .

**Теорема компактности.** Если  $\chi(\mathcal{H}) > t$  и все ребра гиперграфа  $\mathcal{H}$  конечны, то существует конечный подгиперграф  $\mathcal{G}$  гиперграфа  $\mathcal{H}$  с  $\chi(\mathcal{G}) > t$ .

**Доказательство** (счетный случай). Не ограничивая общности, положим  $V = \omega$ . Определим  $\mathcal{H}_n$  как подгиперграф с множеством вершин  $V_n = [n]$  и множеством ребер  $E_n = \{e \in E: e \subseteq [n]\}$ . Предположим, что  $\chi(\mathcal{H}_n) \leq t$  при всех  $n \in \omega$ . Таким образом, существует раскраска  $\lambda_n: [n] \rightarrow [t]$ , не дающая монохроматических ребер. Рассмотрим образы  $\lambda_n(1)$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ . Согласно принципу ящиков Дирихле, некоторое значение, скажем  $i_1 \in [t]$ , присутствует бесконечно много раз. Положим  $\lambda^*(1) = i_1$ , и пусть  $n_1 < n_2 < \dots$  — те индексы, для которых  $\lambda_{n_i}(1) = i_1$ . Рассмотрим образы  $\lambda_{n_i}(2)$ ,  $i \geq 2$ . Как и раньше, некоторая величина, скажем  $i_2 \in [t]$ , будет встречаться бесконечно часто. Положим  $\lambda^*(2) = i_2$ , и пусть  $n'_1 < n'_2 < \dots$  есть подпоследовательность из  $n_i$ , такая, что  $\lambda_{n'_i}(2) = i_2$ . Рассмотрим образы  $\lambda_{n'_i}(3)$ ,  $i \geq 3$ . И вновь некоторое число, скажем  $i_3 \in [t]$ , встречается бесконечно часто. Положим  $\lambda^*(3) = i_3$  и определим  $n''_1 < n''_2 < \dots$  как подпоследовательность из  $n'_i$ , для которой  $\lambda_{n''_i}(3) = i_3$ . Продолжая этот процесс (согласно лемме Кёнига<sup>2)</sup>),

<sup>1)</sup> Общеупотребителен (особенно среди специалистов по теории множеств) синоним *гомогенный*.

<sup>2)</sup> Утверждающей, что бесконечное дерево, все вершины которого имеют конечные степени, содержит конечный путь.

получаем отображение  $\lambda^*: \omega \rightarrow [t]$  с тем свойством, что в  $\mathcal{H}$  нет  $\lambda^*$ -монохроматического ребра, т. е.  $e \notin \lambda^{*-1}(i)$  для всех  $e \in E$ ,  $i \in [t]$ . Это сразу следует из построения  $\lambda^*$ , поскольку для каждого  $n$  найдется такое  $n'$  (а в действительности их бесконечно много), что  $\lambda^*(i) = \lambda_{n'}(i)$ ,  $i \in [n]$ . Однако это противоречит предположению о том, что  $\chi(\mathcal{H}) > t$ , и, значит (для счетного случая), доказательство закончено. Для доказательства общего случая требуется использование аксиомы выбора либо ее аналога, такого, как теорема Тихонова, и оно приводится здесь не будет. Конечно, этот результат также следует из теоремы компактности для пропозиционных исчислений.  $\square$

В заключение заметим, что многие концепции теории Рамсея можно представить в терминах теории категорий, и именно на этом пути недавно был получен целый ряд сильных результатов [L; NR1, 3]. Однако, преследуя конкретные цели и для того, чтобы (без особой на то необходимости) не сужать круг наших читателей, мы здесь не будем развивать этот подход.

## Глава 2

# ТЕОРЕМА РАМСЕЯ

Прототипом «рамсеевской теоремы» послужила оригинальная теорема самого Рамсея. Первоначально доказанная в связи с некоторыми вопросами разрешимости в логике [R], она оказалась тем плодотворным зерном, из которого выросла большая часть рамсеевской теории.

Прежде всего рассмотрим (как и Рамсей) бесконечный случай.

**Теорема Рамсея (бесконечный случай).** Для всех  $k, r \in \omega$  и произвольного  $r$ -раскрашивания  $\chi: \left[ \begin{smallmatrix} \omega \\ k \end{smallmatrix} \right] \rightarrow [r]$  множества всех  $k$ -элементных подмножеств множества  $\omega$  всегда найдется бесконечное подмножество  $S \subseteq \omega$  со всеми своими  $k$ -элементными подмножествами, имеющими один и тот же цвет.

*Замечание.* Подобные утверждения очень часто формулируют посредством так называемой стрелочной записи Эрдёша и Радо. Так, утверждение теоремы в этой форме принимает вид  $\left[ \begin{smallmatrix} \omega \\ k \end{smallmatrix} \right] \rightarrow \left[ \begin{smallmatrix} \omega \\ k \end{smallmatrix} \right]_r$  (или вид  $(\omega)^k \rightarrow (\omega)^k_r$ , если уславливаются использовать  $(\omega)^k$  вместо  $\left[ \begin{smallmatrix} \omega \\ k \end{smallmatrix} \right]$ ). Эпизодически и мы будем прибегать к такой записи там, где не возникает двоякого толкования.

**Доказательство.** Прежде всего разберем случай  $k = 2$  как наиболее обозримый. Случай  $k = 1$  это не что иное, как бесконечный аналог принципа Дирихле: если бесконечное число предметов распределено по конечному числу ящиков, то некоторый ящик содержит бесконечное число предметов.

При  $k = 2$  можно отождествить пары  $\left[ \begin{smallmatrix} \omega \\ 2 \end{smallmatrix} \right]$  с ребрами полного графа  $K_\omega$  с  $\omega$  вершинами. Пусть  $\chi: \left[ \begin{smallmatrix} \omega \\ 2 \end{smallmatrix} \right] \rightarrow [r]$  есть произвольное  $r$ -раскрашивание ребер этого  $K_\omega$ .

(1) Рассмотрим ребра вида  $\{0, x\}$ , т. е. ребра, инцидентные нулю. Некоторый цвет, скажем  $c_1$ , должен закрашивать бесконечное количество таких ребер. Пусть  $X = \{x_i: i \in \omega\}$  — множество таких  $x > 0$ , что  $\chi(\{0, x\}) = c_1$ .

(2) Рассмотрим ребра вида  $\{x_0, x_i\}$ , где  $x_i \in X$ . Некоторый цвет, скажем  $c_2$ , должен закрашивать бесконечное количество таких ребер. Пусть  $Y = \{y_i: i \in \omega\}$  — множество таких  $y_i > x_0$ , что  $\chi(\{x_0, y_i\}) = c_2$ .

(3) Рассмотрим ребра  $\{y_0, y_i\}$ . Некоторый цвет, скажем  $c_3$ , должен закрашивать бесконечное количество таких ребер. Пусть  $Z = \{z_i: i \in \omega\}$  — множество таких  $z_i > y_0$  в  $Y$ , что  $\chi(\{y_0, z_i\}) = c_3$ , и т. д.

Очевидно, этот процесс продолжаем до бесконечности. Положим  $T = \{0, x_0, y_0, z_0, \dots\}$ .

**Основное положение.** Цвет каждой пары  $\{t, t'\} \in \left[ \begin{smallmatrix} T \\ 2 \end{smallmatrix} \right]$  зависит только от значения  $\min\{t, t'\}$ . Таким образом, каждому целому  $t \in T$  можно поставить в соответствие новый цвет  $\chi^*(t) \in [r]$  по правилу

$$\chi^*(t) = \chi(\{t, t'\}) \text{ для } t' > t \text{ в } T.$$

Согласно принципу Дирихле, некоторое бесконечное подмножество  $S \subseteq T$  должно быть одноцветным относительно  $\chi^*$ , т. е. все  $\chi^*(s)$  одинаковы для всех  $s \in S$ . Но, согласно определению  $\chi^*$ , это в точности означает, что все  $\{s, s'\}$  имеют один цвет относительно  $\chi$ -раскрашивания. Теорема Рамсея доказана для  $k = 2$ .

Подытожим сказанное выше.

(1) По данному раскрашиванию  $\chi: \left[ \begin{smallmatrix} \omega \\ 2 \end{smallmatrix} \right] \rightarrow [r]$  определяется новое, «индуцированное» раскрашивание  $\chi^*: \left[ \begin{smallmatrix} \omega \\ 1 \end{smallmatrix} \right] \rightarrow [r]$  («наведенное»), обладающее достаточно регулярной структурой на (большом) подмножестве множества  $\omega$ .

(2) Применяем (по индукции) соответствующую теорему Рамсея для  $\left[ \begin{smallmatrix} \omega \\ 1 \end{smallmatrix} \right]$  по отношению к  $\chi^*$ -раскрашиванию.

Такое логическое образование постоянно встречается в теории Рамсея. Вероятно, это наиболее продуктивный подход при

доказательстве рамсеевских теорем существования для многих классов структур. На страницах нашей книги читатель неоднократно повстречается с различными обликами этой техники.

Пример тому — продолжение доказательства теоремы Рамсея, случай  $k = 3$ . По исходному  $r$ -раскрашиванию  $\chi: \left[ \begin{smallmatrix} \omega \\ 3 \end{smallmatrix} \right] \rightarrow [r]$  индуцируем  $r$ -раскрашивание  $\chi_1$  пар из  $X = \omega - \{0\}$  по правилу  $\chi_1(\{x, x'\}) = \chi(\{0, x, x'\})$ . По теореме Рамсея для  $k = 2$  множество  $X$  содержит некоторое бесконечное топо  $\chi_1$  множество  $X' = \{x'_i: i \in \omega\}$  (т. е. все значения  $\chi_1(\{x'_i, x'_j\})$  одинаковы), скажем цвета  $c_1$ . Далее индуцируем  $r$ -раскрашивание  $\chi_2$  на  $\left[ \begin{smallmatrix} Y \\ 2 \end{smallmatrix} \right]$ , где  $Y = X' - \{x'_0\}$  по правилу  $\chi_2(\{y, y'\}) = \chi(\{x'_0, y, y'\})$ . Как и ранее, по теореме Рамсея для  $k = 2$  множество  $Y$  содержит бесконечное топо  $\chi_2$  множество  $Y' = \{y'_i: i \in \omega\} \subset Y$ , имеющее, скажем, цвет  $c_2$ . Затем, конечно, индуцируем  $\chi_3$  на  $\left[ \begin{smallmatrix} Z \\ 2 \end{smallmatrix} \right]$ , где  $Z = Y' - \{y'_0\}$  по правилу  $\chi_3(\{z, z'\}) = \chi(\{y'_0, z, z'\})$  и т. д.

Тем самым, в конце концов, как и ранее, образуем множество  $T = \{0, x'_0, y'_0, \dots\}$ , которое по построению обладает тем свойством, что цвет любой тройки  $\{t, t', t''\}$  зависит лишь от  $\min\{t, t', t''\}$ . Из  $T$  можно тогда выделить желаемое множество  $S$ , все тройки которого имеют один цвет.

Доказательство для произвольного  $k$  проводится в точности по той же схеме. Теорема Рамсея доказана.  $\square$

Общепринятая форма конечного случая теоремы Рамсея имеет следующую формулировку:

**Теорема Рамсея (конечный случай).** Для всех  $k, l, r \in \omega$  найдется  $n(k, l, r) \in \omega$ , такое, что если  $n \geq n(k, l, r)$  и  $\chi: \left[ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right] \rightarrow [r]$  есть произвольное  $r$ -раскрашивание всех  $k$ -подмножеств из  $[n]$ , то некоторое  $l$ -подмножество из  $[n]$  имеет все  $k$ -подмножества одного и того же цвета.

(Более кратко: для всех  $k, l, r \in \omega$  существует  $n(k, l, r)$ , такое, что неравенство  $n \geq n(k, l, r)$  влечет  $\left[ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right] \rightarrow \left[ \begin{smallmatrix} l \\ k \end{smallmatrix} \right]_r$ .)

По теореме компактности этот конечный вариант теоремы Рамсея сразу следует из бесконечного случая. К сожалению, такой способ доказательства не дает оценки для наименьших возможных значений чисел  $n(k, l, r)$ . Эти числа, известные как числа Рамсея (классические), обозначаются через  $R(k, l, r)$ ; они интенсивно изучаются на протяжении последних 50 лет. Однако, несмотря на предпринятые усилия, о них известно относительно мало. Все известные нетривиальные значения приведены в следующей таблице:

$k$	$l$	$r$	$R(k, l, r)$
2	3	2	6
2	4	2	18
2	3	3	17
2	5	2	42-55

Конечно,  $R(1, l, r) = (l-1)r + 1$ ,  $R(k, k, r) = k$ .

Наилучшие известные общие оценки для  $R(k, l, r)$  получены с использованием вероятностного метода Эрдёша. Не удивительно, что к нему же восходят и наиболее ранние (но по-прежнему хорошие) оценки.

Проиллюстрируем простой вариант этого метода оценивания на следующем результате. Обозначим  $R(2, k, 2)$  через  $R(k)$ .

**Теорема (Эрдёш [E1]).** Для некоторой фиксированной константы  $c > 0$  имеет место оценка

$$R(k) > ck2^{k/2}. \quad (2.1)$$

**Доказательство.** Рассмотрим полный граф  $K_n$  на множестве вершин  $[n]$ . Будем называть 2-раскрашивание ребер графа  $K_n$  «хорошим», если оно содержит одноцветную копию графа  $K_k$ . Если  $X$  — множество из  $k$  вершин графа  $K_n$ , то имеется  $2 \cdot 2^{\binom{n}{2} - \binom{k}{2}}$  способов для такой 2-раскраски ребер  $K_n$ , при которой все ребра на вершинах  $X$  имеют один и тот же цвет. Поскольку имеется в точности  $\binom{n}{k}$  способов выбора  $X$ , состоящего из  $k$  точек, то существует не более чем  $\binom{n}{k} 2^{\binom{n}{2} - \binom{k}{2} + 1}$  «хороших» раскрашиваний. Таким образом, если

$$\binom{n}{k} 2^{\binom{n}{2} - \binom{k}{2} + 1} < 2^{\binom{n}{2}}$$

(полное число 2-раскрашиваний графа  $K_n$ ), т. е. если

$$\binom{n}{k} < 2^{\binom{k}{2} - 1}, \quad (2.2)$$

то существует «нехорошее» 2-раскрашивание графа  $K_n$ . Но это означает, что  $R(k)$  должно превосходить такое значение  $n$ , поскольку по определению любое 2-раскрашивание графа  $K_{R(k)}$  должно быть хорошим. А так как неравенство (2.2) выполняется при  $n > ck2^{k/2}$ , то (2.1) доказано.  $\square$

Наиболее точные границы, известные для рамсеевских чисел, имеются для  $r(k, 3)$  — наименьшего  $m$ , при котором любое 2-раскрашивание графа  $K_m$  содержит либо  $K_k$  цвета 1, либо  $K_3$

цвета 2. В этом случае для некоторых положительных констант  $c$  и  $c'$  выполняется

$$ck^2/(\log k)^2 < r(k, 3) < c'k^2/\log k.$$

Верхняя оценка — это недавний результат Атья, Комлоша и Семереди, который во время написания книги опубликован еще не был. Наилучшая конструктивная нижняя оценка для  $R(k)$  имеет вид

$$R(k) > \exp(c(\log k)^{4/3}(\log \log k)^{1/3})$$

и принадлежит Франклю [Fr] и Чжан [Ch]. Эрдеш предлагает 250 долларов за конструктивное доказательство того, что  $R(k) > (1 + \varepsilon)^k$  для фиксированного  $\varepsilon > 0$ .

Завершим эту главу типичным приложением теории Рамсея.

**Предложение.** Каждая конечная полугруппа  $S$  содержит идемпотент, т. е. элемент  $x$ , такой, что  $x^2 = x$ .

**Доказательство.** Рассмотрим произвольную последовательность  $\bar{x} = (x_0, x_1, x_2, \dots, x_t)$ , где  $x_i \in S$  и  $s = |S|$ . Введем  $s$ -раскрашивание  $K_t$  на вершинах  $[t]$  по правилу  $\chi(\{i, j\}) = x_{i+1} \times \dots \times x_{j+2} \dots x_j \in S$ ,  $i < j$ . Возьмем  $t = R(s)$ , тогда  $K_t$  содержит одноцветный треугольник, скажем  $\chi(\{i, j\}) = \chi(\{i, k\}) = \chi(\{j, k\}) = x \in S$ ,  $i < j < k$ . Но это означает, что

$$\prod_{\alpha < i \leq j} x_\alpha = \prod_{j < \beta \leq k} x_\beta = \prod_{i < \gamma \leq k} x_\gamma = \left( \prod_{\alpha < i \leq j} x_\alpha \right) \left( \prod_{j < \beta \leq k} x_\beta \right) = x,$$

т. е.  $x = x^2$ .  $\square$

**Упражнение 2.1.** Определим внедиагональное число Рамсея  $R(k, l)$  как наименьшее целое  $m$ , при котором в любой 2-раскраске графа  $K_m$  (скажем, в красный и голубой цвета) найдется либо красный  $K_k$ , либо голубой  $K_l$ .

(а) Покажите, что  $R(k, l) \leq R(k-1, l) + R(k, l-1)$ .

(б) Из этого неравенства выведите верхние оценки для  $R(k, l)$  и  $R(k)$ .

**Упражнение 2.2.** (а) Докажите, что для каждого  $n$  существует  $f(n)$ , такое, что в любом множестве из  $f(n)$  точек плоскости (в общем положении) всегда найдется  $n$  точек, которые образуют вершины выпуклого  $n$ -угольника. Оцените  $f$  сверху и снизу. (Указание: используйте теорему Рамсея.)

(б) Что изменится, если потребовать, чтобы выпуклый  $n$ -угольник не содержал внутренних точек?

**Упражнение 2.3.** Под турниром понимается полный граф, в котором каждое ребро ориентировано. Турнир транзитивен, если  $a \rightarrow b$  и  $b \rightarrow c$  влечет за собой  $a \rightarrow c$ . Покажите, что для каж-



дого  $n$  существует  $g(n)$ , такое, что каждый турнир на  $g(n)$  точках содержит транзитивный подтурнир на  $n$  точках.

**Упражнение 2.4.** Пусть  $A = \{a_1 < a_2 < \dots\}$  состоит из чисел вида  $\{4^i + 4^j: 0 \leq i < j\}$ . Покажите, что

(1) каждое  $n \in \omega$  имеет не более трех представлений вида  $n = a_i + a_j, i < j$ ;

(2) для каждого разбиения  $A$  на конечное количество классов, скажем  $A = A_1 \cup \dots \cup A_r$ , для некоторого  $A_i = \{a'_1 < a'_2 < \dots\}$  бесконечно много чисел  $n \in \omega$  можно представить в виде  $n = a'_i + a'_j, i < j$ , по крайней мере тремя способами. (Указание: см. теорему Рамсея.)

**Упражнение 2.5.** Пусть  $\mathcal{P}_n$  обозначает градуированное множество разбиений множества  $[n]$ , частично упорядоченное по склейке блоков. Напомним, что ранг разбиения  $[n] = B_1 \cup \dots \cup B_k$  определяется как  $n - k$ . Покажите, что семейство  $\{\mathcal{P}_n: n \in \omega\}$  обладает рамсеевским свойством. (Указание: рассмотрите подрешетку  $\mathcal{P}_n$ , порожденную разбиением, наибольший элемент которого имеет размер 2.)

## Глава 3

# ТЕОРЕМА ВАН ДЕР ВАРДЕНА

В 1927 г. ван дер Варден [V1] опубликовал доказательство следующей неожиданной теоремы:

*Если множество всех натуральных чисел разбить на два непересекающихся класса, то по крайней мере один из этих классов должен содержать произвольно длинную арифметическую прогрессию.*

Постановка этой задачи часто приписывается голландскому математику П. Баудету, вероятно, потому, что его имя фигурирует в названии той работы ван дер Вардена, в которой было дано первое доказательство. Однако представляется более обоснованным, что в действительности именно И. Шур впервые сформулировал эту гипотезу в связи со своей работой о распределении квадратичных вычетов по модулю  $p$ . (По поводу исторических подробностей см. предисловие А. Брауэра к избраным трудам Шура [Sc2]<sup>1</sup>.)

<sup>1</sup>) См. также дополнение I настоящей книги. — Прим. перев.

Эта теорема породила ряд очень интересных направлений в комбинаторике и теории чисел; некоторые из них будут освещены в последующих главах. В настоящей главе рассмотрим несколько доказательств этой классической теоремы ван дер Вардена.

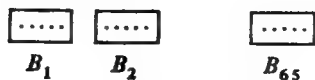
*Основные соображения.* Имеются два на первый взгляд незначительных видоизменения формулировки теоремы ван дер Вардена, каждое из которых тем не менее существенно влияет на доказательство. Во-первых, для каждого  $k$  будем рассматривать лишь конечный начальный кусок (зависящий от  $k$ ) множества  $\mathbb{Z}^+$  (множества положительных целых), чтобы при его разбиении по крайней мере один класс всегда содержал  $k$ -членную арифметическую прогрессию (А. П.). Эта модификация принадлежит О. Шрейеру (см. [V2]) и, согласно бесконечному варианту леммы Кёнига, эквивалентна исходной формулировке. Во-вторых, допускаем разбиения на  $r$  классов, как раньше на 2. Эта идея была предложена Э. Артином и существенна для всех известных доказательств теоремы ван дер Вардена. С учетом этих модификаций «новая» формулировка теоремы ван дер Вардена принимает вид:

Для  $k, r \in \omega$  существует целое  $W(k, r)$ , такое, что если  $[W(k, r)]$  разбивается на  $r$  классов, то по крайней мере один класс содержит  $k$ -членную А. П.

Или более «цветисто»:

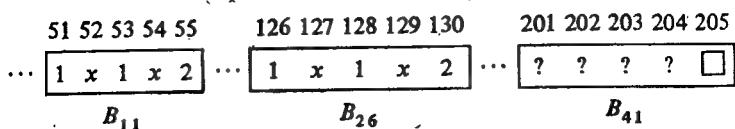
Для всех  $k, r \in \omega$  существует  $W(k, r) \in \omega$ , такое, что любое  $r$ -раскрашивание множества  $[W(k, r)]$  всегда имеет одноцветную  $k$ -членную А. П.

Обратимся сначала к отдельным частным случаям. Для  $k = 2$  и произвольного  $r$  ответ тривиален:  $W(2, r) = r + 1$ . Рассмотрим случай  $k = 3, r = 2$ . Утверждаем, что можно взять  $W(3, 2) = 325$ . Чтобы убедиться в этом, предположим, что  $\chi: [325] \rightarrow [2]$  есть произвольное 2-раскрашивание. Представим множество  $[325]$  состоящим из 65 последовательных блоков длины 5, т. е.  $[325] = [1, 5] \cup [6, 10] \cup \dots \cup [321, 325]$ , которое символически записываем как



Каждый блок  $B_i$  имеет 5 точек, и, следовательно, его можно раскрасить одним из  $2^5 = 32$  способов. Таким образом, среди

первых 33 блоков некоторая пара блоков раскрашена одинаково (по принципу Дирихле); пусть для определенности это блоки  $B_{11}$  и  $B_{26}$ . Рассмотрим 2-раскрашивание блока  $B_{11} = \{51, 52, 53, 54, 55\}$ . Среди первых трех элементов в  $B_{11}$  по крайней мере два должны иметь один и тот же цвет, скажем  $\chi(51) = \chi(53) = 1$ . Если  $\chi(55) = 1$ , то прогрессия найдена, поэтому  $\chi(55) = 2$ . Рассмотрим сложившуюся ситуацию с этой точки зрения:



Мы утверждаем, что все сделано. Действительно, если  $\chi(205) = 2$ , то 55, 130, 205 — это 3-членная А. П. цвета 2, а если  $\chi(205) = 1$ , то 51, 128, 205 — это 3-членная А. П. цвета 1.

В действительности мы просто сфокусировали две 2-членные А. П., имеющие разные цвета на целом 205, так что вне зависимости от своего цвета 205 оказывается третьим членом некоторой топо  $\chi$  А. П.

Используем те же соображения и для доказательства существования  $W(3, 3)$ . Здесь мы, однако, начнем с 3-раскрашивания первых  $7(2 \cdot 3^7 + 1)(2 \cdot 3^{7(2 \cdot 3^7 + 1)} + 1)$  целых.

Прежде всего разобьем эти целые на  $2 \cdot 3^{7(2 \cdot 3^7 + 1)} + 1$  последовательных блоков  $B_i$ , каждый длины  $7(2 \cdot 3^7 + 1)$ . Теперь, поскольку имеется в точности  $3^{7(2 \cdot 3^7 + 1)}$  способов для 3-раскраски блока  $B_i$ , то среди первых  $3^{7(2 \cdot 3^7 + 1)} + 1$  из них по крайней мере два, скажем  $B_{i_1}$  и  $B_{i_1 + d_1}$ , должны быть 3-раскрашены в точности одинаково. (Используется именно  $2 \cdot 3^{7(2 \cdot 3^7 + 1)} + 1$  блоков для того, чтобы блок  $B_{i_1 + 2d_1}$  был определен; скоро он понадобится.)

Далее, для каждого  $i$  разобьем целые в  $B_i$  на  $2 \cdot 3^7 + 1$  подблоков  $B_{i,j}$  из 7 целых каждый. Поскольку имеется в точности  $3^7$  способов для 3-раскраски каждого  $B_{i,j}$ , то среди первых  $3^7 + 1$  блоков  $B_{i,j}$  по крайней мере 2, скажем  $B_{i,i_2}$  и  $B_{i,i_2 + d}$ , имеют в точности одинаковую 3-раскраску.

Наконец, в первых четырех элементах блока  $B_{i,i_2}$  некоторый цвет должен присутствовать по крайней мере дважды, скажем  $\chi(i_3) = \chi(i_3 + d_3) = 1$ , где  $i_3, i_3 + d_3 \in B_{i,i_2}$ . Поскольку  $i_3 + 2d_3$  также принадлежит  $B_{i,i_2}$  (поэтому мы и выбрали длину 7), то можно предположить, не ограничивая общности, что  $\chi(i_3 + 2d_3) = 2$  (если  $\chi(i_3 + 2d_3) = 1$ , то искомая А. П. имеется). Сложившаяся ситуация показана на рис. 3.1.

Рассмотрим подблок  $B_{i,i_2 + 2d_2}$ . Вследствие определенного выбора  $i_2$  и  $d_2$  он является подблоком блока  $B_{i_1}$ . Далее, поскольку

ку  $B_{i_1, i_2}$  и  $B_{i_1, i_2+d_2}$  имеют одинаковую 3-раскраску, то целые  $i_3 + 7d_2$  и  $i_3 + d_3 + 7d_2$  должны иметь цвет 1, а целое  $i_3 + 2d_3 + 7d_2$  — цвет 2. Стало быть, соответствующий элемент  $i + 2d_3 + 14d_2 \in B_{i_1, i_2+2d_2}$  должен иметь цвет 3 из-за монохроматичности арифметических прогрессий  $i_3 + 2d_3$ ,  $i_3 + 2d_3 + 7d_2$ ,

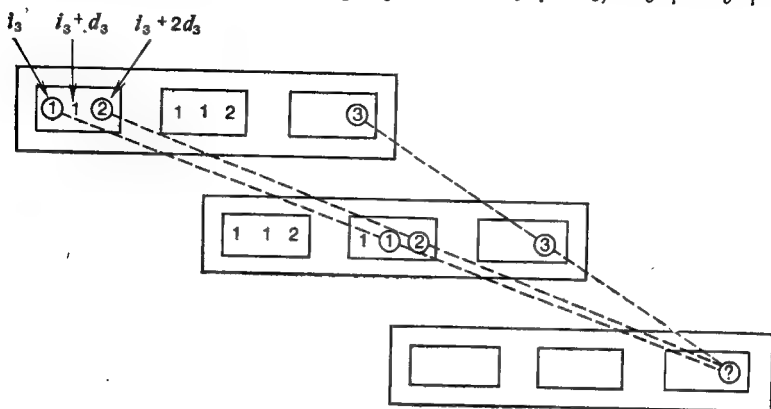


Рис. 3.1.

$i_3 + 2d_3 + 14d_2$  и  $i_3$ ,  $i_3 + d_3 + 7d_2$ ,  $i_3 + 2d_3 + 14d_2$ . Конечно, поскольку  $B_{i_1}$  и  $B_{i_1+d_1}$  раскрашены одинаково, то  $x \in B_{i_1}$  и  $x + 7(2 \cdot 3^7 + 1)d_1 \in B_{i_1+d_1}$  всегда имеет тот же цвет. В частности,

$$\chi(i_3 + 7(2 \cdot 3^7 + 1)d_1) = \chi(i_3 + d_3 + 7(2 \cdot 3^7 + 1)d_1) = \\ = \chi(i_3 + 7d_2 + 7(2 \cdot 3^7 + 1)d_1) = 1,$$

$$\chi(i_3 + 2d_3 + 7(2 \cdot 3^7 + 1)d_1) = \chi(i_3 + 2d_3 + 7d_2 + 7(2 \cdot 3^7 + 1)d_1) = 2,$$

$$\chi(i_3 + 2d_3 + 14d_2 + 7(3^7 + 1)d_1) = 3.$$

Теперь рассмотрим целое  $m = i_3 + 2d_3 + 14d_2 + 14(3^7 + 1)d_1$ . Мы утверждаем, что имеется три разноцветных 2-членных топох А. П., сфокусированных на  $m$ , так что вне зависимости от цвета  $\chi(m)$  это  $m$  станет третьим членом 3-членной топох А. П. Дабы убедиться в этом, извлечем просто подходящую часть рис. 3.1:

$$\begin{aligned} & i_3 \dots i_3 + d_3 + 7d_2 + 7(3^7 + 1)d_1 \\ & i_3 + 3d_3 \dots i_3 + 2d_3 + 7d_2 + 7(3^7 + 1)d_1 \\ & i_3 + 2d_3 + 14d_2 \dots i_3 + 2d_3 + 14d_2 + 7(3^7 + 1)d_1 \dots i_3 + 2d_3 + 14d_2 + 14(3^7 + 1)d_1 = m. \end{aligned}$$

Таким образом, показано, что можно взять

$$W(3, 3) = 7(2 \cdot 3^7 + 1)(2 \cdot 3^{7(2 \cdot 3^7 + 1)} + 1).$$

Общее доказательство проводится двойной индукцией по длине  $k$  искомой прогрессии и числу  $r$  цветов раскраски, причем предполагается не только существование  $W(k, r-1)$ , но и существование  $W(k-1, r')$  для всех  $r'$ . Нам нужны очень большие значения  $r'$ , поскольку в общем случае мы будем всегда разбивать исходное множество целых на блоки  $B_i$  равной длины, состоящие из последовательных<sup>1)</sup> целых, и применять предположения индукции к блокам, которые для наших целей должны вести себя как целые (индуцированное раскрашивание блоков). Если целые раскрашиваются в  $r$  цветов, то блоки — в  $r^{|B_i|}$ . По этой причине величины, которые мы получаем для  $W(k, r)$ , огромны. В действительности не известны хотя бы примитивно рекурсивные верхние оценки. С другой стороны, даже при  $r=2$  наилучшая известная нижняя оценка имеет вид  $ck2^k$  [Be]. Столь сильное расхождение границ для  $W(k, r)$  демонстрирует размеры наших знаний в этой области.

Завершению доказательства теоремы ван дер Вардена наменным путем препятствует еще одно обстоятельство — выбор приемлемых обозначений.

**Упражнение 3.1.** Завершите доказательство теоремы ван дер Вардена (не жульничать!).

**Упражнение 3.2.** Обозначение  $W(k, r)$  обычно используется для наименьшего целого, для которого выполняется теорема ван дер Вардена. В этих обозначениях

(а) Известно, что  $W(2, 2)=3$ ,  $W(3, 2)=9$ ,  $W(4, 2)=35$ ,  $W(5, 2)=178$ ,  $W(3, 3)=27$ ,  $W(3, 4)=76$ . Докажите 1, 2 и 5-е из этих равенств<sup>2)</sup>.

(б) Каковы верхние оценки для  $W(10, 10)$ ?

**Короткое доказательство.** Вероятно, нет ничего удивительного в том, что некоторое усиление утверждения теоремы ван дер Вардена приводит к несколько более сильному результату, который тем не менее чуть легче доказывать [GR2]. Приведем такой результат. Следует отметить, что его доказательство по своей структуре совпадает с первоначальным доказательством ван дер Вардена.

Два вектора  $(x_1, \dots, x_m)$ ,  $(x'_1, \dots, x'_m) \in [0, 1]^m$  назовем  $l$ -эквивалентными, если они совпадают вплоть до последнего появления  $l$ . (Таким образом, любые два  $l$ -вектора, не содер-

<sup>1)</sup> На самом деле эти блоки не должны быть пересекающимися — они точно пригнаны друг к другу.

<sup>2)</sup> Миллс на основании этих данных сделал заключение, что  $W(k, 2) \rightarrow (3/2)k!$ .

жащие  $l$ , являются  $l$ -эквивалентными.) Для  $l, m \geq 1$  рассмотрим следующее утверждение:

Для любого  $r$  существует  $N(l, m, r)$ , такое, что для любого  $r$ -раскрашивания  $\chi$ :  $[N(l, m, r)] \rightarrow [r]$  существуют  $a, d_1, \dots, d_m \in \mathbb{P}$ , такие, что  $\chi(a + \sum_{i=1}^m x_i d_i)$  постоянно на каждом классе  $l$ -эквивалентности множества  $[0, l]^m$ .

**Теорема.** Утверждение  $S(l, m)$  имеет место для всех  $l, m \geq 1$ .

**Доказательство.** (1) Покажем, что из справедливости  $S(l, m)$  для некоторого  $m \geq 1$  следует справедливость  $S(l, m+1)$ . Пусть  $M = N(l, m, r)$ ,  $M' = N(l, 1, r^M)$  для фиксированного  $r$  и раскраска  $\chi: [MM'] \rightarrow [r]$  задана. Определим индуцированную раскраску  $\chi': [M'] \rightarrow [r^M]$  таким правилом:  $\chi'(k) = \chi'(k')$  тогда и только тогда, когда  $\chi(kM - j) = \chi(k'M - j)$  для  $0 \leq j < M$ . По предположению индукции существуют  $a'$  и  $d'$ , такие, что  $\chi'(a' + xd')$  постоянно для  $x \in [0, l-1]$ . Поскольку  $S(l, m)$  можно применить к интервалу  $I = [(a' - 1)M + 1, a'M]$ , то в силу выбора  $M$  существуют такие  $a, d_1, \dots, d_m$ , для которых все суммы  $a + \sum_{i=1}^m x_i d_i$ ,  $x_i \in [0, l]$ , лежат в  $I$ , что раскраска  $\chi(a + \sum_{i=1}^m x_i d_i)$  постоянна на классах  $l$ -эквивалентности. Положим  $d'_i = d_i$  для  $i \in [m]$  и  $d'_{m+1} = d'M$ . Тогда  $S(l, m+1)$  выполняется.

(2) Покажем, что из справедливости  $S(l, m)$  для всех  $m \geq 1$  следует справедливость  $S(l+1, 1)$ . Пусть  $r$  фиксировано и  $\chi: [2N(l, r, r)] \rightarrow [r]$  задана. Тогда существуют такие  $a, d_1, \dots, d_r$ , что для  $x_i \in [0, l]$  величина  $a + \sum_{i=1}^r x_i d_i$  ограничена сверху числом  $N(l, r, r)$  и раскраска  $\chi(a + \sum_{i=1}^r x_i d_i)$  постоянна на классах  $l$ -эквивалентности. В силу принципа Дирихле существуют  $u, v \in [0, r]$ ,  $u < v$ , такие, что  $\chi(a + \sum_{i=1}^u l d_i) = \chi(a + \sum_{i=1}^v l d_i)$ . Следовательно,  $\chi((a + \sum_{i=1}^u l d_i) + x(\sum_{i=u+1}^v d_i))$  постоянна для  $x \in [0, l]$ . Это доказывает  $S(l+1, 1)$ .

Поскольку  $S(1, 1)$  очевидно справедливо, то теорема следует из принципа математической индукции.  $\square$

Заметим, что теорема ван дер Вардена для  $(l+1)$ -членных  $A$ . П. есть в точности утверждение  $S(l, 1)$ .

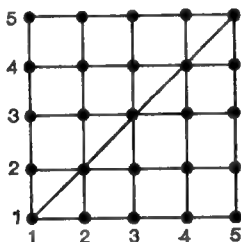
**Упражнение 3.3.** Пусть  $A = (a_1 < a_2 < \dots)$  — бесконечная последовательность целых с равномерно ограниченными  $a_{n+1} - a_n$ .

- (а) Покажите, что  $A$  содержит произвольно длинную А. П.  
 (б) Покажите, что  $A$  не обязано содержать бесконечную А. П.  
 (с) Оцените (в терминах  $W(k, r)$ ) число членов последовательности  $A$ , необходимых для гарантированного наличия  $k$ -членной А. П. (если сдадитесь, см. гл. 11).

## Глава 4

## ТЕОРЕМА ХАЛЕСА—ДЖЕВЕТТА

Теорему ван дер Вардена, в сущности, можно рассматривать не как результат о целых, а как теорему о конечных последовательностях, образуемых из конечных множеств. Это обстоятельство впервые было отмечено в работе Халеса и Джевлетта [НД]. Их результат изучается в настоящей главе.

Рис. 4.1. Прямые в  $A^2$ .

Наше изложение будет в основном опираться на следующие понятия. Для фиксированного конечного множества  $A = \{a_1, \dots, a_t\}$  было бы желательно образовать некую структуру из  $n$ -множеств  $A^n$ , аналогичную  $n$ -мерным векторным пространствам над конечным полем. Не предполагается, понятно, что  $A$  снабжено какой-то специальной алгебраической структурой, так что весьма ограничен потенциальный список тех линейных уравнений в координатах, которые могли бы задавать определенные аналоги векторных подпространств. В действительности такой список исчерпывается двумя равенствами:

- (1)  $x_i = x_j$ ;
- (2)  $x_i = a$  (константа).

Как определять «прямую» такими уравнениями? Вполне естественно такое

**Определение.** Для непустого множества координат  $I \subseteq [n]$  множество  $L = \{(x_1, \dots, x_n) : x_i = x_j \ \forall i, j \in I, x_j = b_j \in A, j \notin I\}$  называется (комбинаторной) прямой в  $A^n$ .

Заметим, что поскольку  $I \neq \emptyset$ , то  $|L| = t$  (как и ожидалось).

В качестве примера на рис. 4.1 показаны прямые множества  $A^2$ , где  $A = [5]$ .

**Упражнение 4.1.** Сколько прямых имеет множество  $A^n$ ?

В такой терминологии очень удобную форму приобретает

**Теорема Халеса — Джеветта.** Для всех конечных множеств  $A$  и целых  $r \in \omega$  существует  $N(A, r)$ , такое, что для  $n \geq N(A, r)$  в любой  $r$ -раскраске  $A^n$  всегда найдется одноцветная прямая.

*Набросок доказательства.* Доказательство (как обычно) проведем двойной индукцией по  $|A|$  и  $r$  с одновременным использованием  $r$  различных раскрашиваний. При  $|A| = 1$  результат очевиден. Предположим, что для некоторого  $t \geq 2$  он выполняется для всех значений  $|A| < t$ . Идея состоит в следующем: задаем начальное  $r$ -раскрашивание  $\chi: A^n \rightarrow [r]$ . Во-первых, выберем большое целое  $N_1$ , определяемое позже<sup>1)</sup>, так что  $n - N_1 \ll N_1$ . Понимая  $A^n$  как  $A^{n-N_1} \times A^{N_1}$ , образуем индуцированное раскрашивание  $\chi^{(1)}$  множества  $A^{N_1}$  по правилу:  $\chi^{(1)}((y_1, \dots, y_{N_1})) = \chi^{(1)}((y'_1, \dots, y'_{N_1}))$  тогда и только тогда, когда для всех  $(x_1, \dots, x_{n-N_1}) \in A^{n-N_1}$

$$\chi((x_1, \dots, x_{n-N_1}, y_1, \dots, y_{N_1})) = \chi((x_1, \dots, x_{n-N_1}, y'_1, \dots, y'_{N_1})).$$

Другими словами, раскрашиваем  $\bar{y} = (y_1, \dots, y_{N_1}) \in A^{N_1}$ , согласуясь с функцией  $\chi(\bar{x}, \bar{y})$ ,  $\bar{x} \in A^{n-N_1}$ . Так что это есть в действительности некоторое  $r^{t^{n-N_1}}$ -раскрашивание  $A^{N_1}$ . Пусть  $B = \{a_1, \dots, a_{t-1}\}$ . Тогда  $\chi^{(1)}$  это также и раскрашивание  $B^{N_1}$ , так что, согласно предположению индукции, найдется прямая  $L$  — топо  $\chi^{(1)}$  (при условии достаточной величины  $N_1$ ), которую можно записать как

$$L_1: \left\{ \begin{array}{l} A^{n-N_1} \times (\dots c \dots a_1 \dots), \\ A^{n-N_1} \times (\dots c \dots a_2 \dots), \\ A^{n-N_1} \times (\dots c \dots a_{t-1} \dots) \end{array} \right\}$$

Сокращенно запишем ее как  $A^{n-N_1} \times X_1(i_1)$ ,  $1 \leq i_1 \leq t-1$ , где  $X_1(i_1)$  обозначает последние  $N_1$  координат из  $t-1$  точек  $L_1$  при  $i_1$ , пробегаящем по  $[t-1]$ .

<sup>1)</sup> В конце доказательства.



Далее сосредоточимся на «начале»  $A^{n-N_1}$ , которое можем понимать как  $A^{n-N_1} = A^{n-N_1-N_2} \times A^{N_2}$  для некоторого  $N_2$ :  $n - N_1 - N_2 \ll N_2$ . В то же время образуем раскрашивание  $\chi^{(2)}$  множества  $A^{N_2}$  по правилу:  $\chi^{(2)}(y_1, \dots, y_{N_2}) = \chi^{(2)}(y'_1, \dots, y'_{N_2})$  тогда и только тогда, когда для всех  $(x_1, \dots, x_{n-N_1-N_2}) \in A^{n-N_1-N_2}$

$$\chi((x_1, \dots, x_{n-N_1-N_2}, y_1, \dots, y_{N_2}) \times X_1(1)) =$$

$$= \chi((x_1, \dots, x_{n-N_1-N_2}, y'_1, \dots, y'_{N_2}) \times X_1(1)).$$

Иными словами, мы  $\chi^{(2)}$ -раскрашиваем  $\bar{y} \in A^{N_2}$  посредством функции  $\chi((\bar{x}, \bar{y}) \times X_1(1))$ ,  $\bar{x} \in A^{t-N_1-N_2}$ . Заметим, что поскольку  $L_1$  одноцветна, то можно использовать  $X_1(2)$  или  $X_1(i)$  для любого  $i \in [t-1]$ . Как и прежде, можно ограничиться рассмотрением  $\chi^{(2)}$  на  $B^{N_2}$  и, используя предположение индукции, найти прямую  $L_2$  — топо $\chi^{(2)}$ , которую можем записать как  $A^{n-N_1-N_2} \times X_2(i_2) \times X_1(1)$ ,  $1 \leq i_2 \leq t-1$  (вновь  $N_2$  предполагается достаточно большим). Заметим, что по построению  $\chi$ -цвет любых  $(t-1)^2$  точек  $(x_1, \dots, x_{n-N_1-N_2}) \times X_2(i_2) \times X_1(i_1)$ ,  $1 \leq i_1, i_2 \leq t-1$ , зависит лишь от выбора  $(x_1, \dots, x_{n-N_1-N_2})$ , а не от конкретных значений  $i_1$  и  $i_2$ . Кроме того, если  $X_2(t)$  обозначает точку, получаемую замещением переменной компоненты (т. е. не константы) конкретным значением  $a_t$ , то  $\chi$ -цвет  $(x_1, \dots, x_{n-N_1-N_2}) \times X_2(t) \times X_1(i_1)$  не зависит от выбора  $i_1 \in [t-1]$ .

Продолжая этот процесс, за  $r$  шагов приходим к множеству из  $t^r$  точек из  $A^n$ , которое запишем как

$$X_r(j_r) \cdots X_{u+1}(j_{u+1}) X_u(j_u) \cdots X_1(j_1), \quad 1 \leq j_1, \dots, j_r \leq t;$$

оно обладает тем свойством, что  $\chi$ -цвет  $X_r(j_r) \cdots X_{u+1}(j_{u+1}) X_u(i^u) \cdots X_1(i_1)$ ,  $1 \leq j_{u+1}, \dots, j_r \leq t$ , не зависит от выбора  $i_k$ :  $1 \leq i_1, \dots, i_k \leq t-1$ .

Теперь доказательство почти закончено. Для его полного завершения рассмотрим  $r+1$  точек

$$Y_u = X_r(t) \cdots X_{u+1}(t) X_u(1) \cdots X_1(1), \quad 0 \leq u \leq r.$$

Некоторая пара из них должна иметь один и тот же цвет; пусть это будут  $Y_h$  и  $Y_{h'}$ , где  $h > h'$ . Наконец, рассмотрим  $t$  точек

$$Y(i) = X_r(t) \cdots X_{k+1}(t) X_h(i) \cdots X_{h'+1}(i) X_{h'}(1) \cdots X_1(1).$$

Для  $1 \leq i \leq t-1$  цвет  $Y(i)$  тот же, что и у  $Y_h$  (по предыдущему замечанию). При  $i = t$  цвет  $Y(t)$  тот же, что и у  $Y_{h'}$ , который, по определению  $h'$ , совпадает с цветом  $Y_h$ . Таким образом, множество  $\{Y(i) : i \in [t]\}$  образует одноцветную прямую в  $A^n$ , что и дает утверждение теоремы.  $\square$

Нетрудно довести все эти замечания до уровня реального доказательства. Для этого прежде всего требуется четко определить  $N(|A|, r)$ ,  $N_1$ ,  $N_2$  и т. д. Вот один из допустимых вариантов. Для  $t = 1$  полагаем  $N(1, r) = 1$ . Для  $t \geq 2$  рекурсивно определяем  $N(t, r)$ :

$$\begin{aligned} c_r &= N(t-1, r), \\ c_{r-1} &= N(t-1, r^{c_r}), \\ c_{r-2} &= N(t-1, r^{c_r + c_{r-1}}), \\ &\dots \\ c_k &= N(t-1, r^{c_r + \dots + c_{k+1}}), \\ c_1 &= N(t-1, r^{c_r + \dots + c_2}), \end{aligned}$$

и  $N(t, r) = c_r + c_{r-1} + \dots + c_1$ .

Является ли столь сильный рост<sup>1)</sup>  $N$  отражением реальной ситуации, или же это всего лишь недостаток техники нашего доказательства? Это одна из наиболее интересных открытых проблем в данной области.

Как и обещано, выведем теорему ван дер Вардена из теоремы Халеса — Джеветта. Действительно, любое  $r$ -раскрашивание  $\chi$  множества  $[k^{N(k, r)}]$  должно содержать  $k$ -членную попох А. П. Каждое целое  $x \in [k^{N(k, r)}]$  можно записать в системе счисления по основанию  $k$  в виде  $x = \sum_{i=0}^{N(k, r)-1} x_i k^i$ , где  $x_i \in \{0, \dots, k-1\}$ . Таким образом, каждому  $x$  ставим в соответствие последовательность  $(x_0, \dots, x_{N(k, r)-1})$ . По определению  $N(k, r)$  и согласно теореме Халеса — Джеветта, должна существовать одноцветная прямая, скажем

$$L: \left\{ \begin{aligned} &(\dots a, \dots 0, \dots b, \dots 0, \dots), \\ &(\dots a, \dots 1, \dots b, \dots 1, \dots), \\ &(\dots a, \dots 2, \dots b, \dots 2, \dots), \\ &\vdots \\ &(\dots a, \dots k-1, \dots b, \dots 2, \dots) \end{aligned} \right\}$$

Ясно, что  $k$  целых, представляемые этими точками  $L$ , принадлежат арифметической прогрессии.

**Обобщения.** Естественно поинтересоваться, выполняется ли теорема Халеса — Джеветта для комбинаторных «плоскостей» (или подпространств более высокой размерности). Конечно, под

<sup>1)</sup> В оригинале — Ackermann-like. — Прим. перев.

плоскостью  $P$  понимается множество из  $t^2$  точек из  $A^n$ , порожденное разбиением  $[n] = I_0 \cup I_1 \cup I_2$  при  $I_1, I_2 \neq \emptyset$  по правилу

$$P = \{(x_1, \dots, x_n) \in A^n: x_i = x_{i'}, i, i' \in I_1; x_i = x_{i'}, i, i' \in I_2; \\ x_j = c_j \in A, j \in I_0\}.$$

Оказывается, что аналоги теоремы Халеса — Джемметта для более высокой размерности сразу следуют из одномерного случая. Например, для плоскости нужно просто заменить исходное  $A$  новым множеством  $A^2$ . Тогда прямая  $L'$  в этом новом множестве примет вид

$$L': \left\{ \begin{array}{l} ((ab), \dots, (a_1 a_1), \dots), \\ ((ab), \dots, (a_1 a_2), \dots), \\ \vdots \\ ((ab), \dots, (a_1 a_t), \dots), \\ \vdots \\ ((ab), \dots, (a_1 a_1), \dots) \end{array} \right\}$$

Поскольку имеется по крайней мере одна переменная координата, то эти  $t^2$  точек естественным образом соответствуют некоторой плоскости в  $A^{2n}$ .

Более уточненное обобщение теоремы — подмена раскраски точек множества  $A^n$  раскраской подпространств из  $A^n$  более высокой размерности. Например, можно  $r$ -раскрашивать прямые из  $A^n$  и задаваться вопросом о наличии плоскости, все прямые которой были бы покрашены в один цвет. Все такие обобщения также истинны и осмысленны, но доказательства их более сложны. Можно немного расширить и понятие прямой (или подпространства). Для фиксированной группы перестановок  $G: A \rightarrow A = \{a_1, \dots, a_t\}$  прямой  $L$  будет называться множество из  $t$  точек множества  $A^n$  вида

$$L: \left\{ \begin{array}{l} (a, \dots, a_1^\sigma, \dots, b, \dots, a_1^\tau, \dots), \\ (a, \dots, a_2^\sigma, \dots, b, \dots, a_2^\tau, \dots), \\ \vdots \\ (a, \dots, a_t^\sigma, \dots, b, \dots, a_t^\tau, \dots) \end{array} \right\},$$

где  $\sigma, \tau, \dots \in G$ .

Иначе говоря, на каждую переменную координату действует некоторый элемент из  $G$ . Вообще такая структура известна как  $n$ -параметрическое множество. Как впервые было показано

в [GR1], и для них выполняются соответствующие рамсеевские теоремы (с рангом, равным «размерности»), такие же, как сама теорема Рамсея, теорема ван дер Вардена, Халеса — Джеветта и многие другие. Здесь также содержатся зародыши идей, необходимых для доказательства того, что совокупность конечно-мерных векторных пространств над фиксированным конечным полем обладает рамсеевским свойством — гипотеза, выдвинутая Рота и доказанная Грэхемом, Либом и Росчайлдом [GLR]. Совсем недавно очень прозрачное доказательство было дано Спенсером [S] (подробнее см. [GRS]).

**Упражнение 4.2.** Докажите 2-мерный вариант теоремы ван дер Вардена, т. е. при всяком конечном раскрашивании  $\mathbb{Z}^2$  некоторый цвет содержит произвольно большую квадратную подтаблицу. (Указание: используйте теорему Халеса — Джеветта.)

**Упражнение 4.3.** Докажите, что для любой конечной подгруппы  $S$  существуют  $n \in \omega$ ,  $x \in S$ , такие, что множество

$$nS + x = \{\underbrace{s + s + \dots + s}_n + x : s \in S\}$$

одноэлементно. (Указание: используйте теорему Халеса — Джеветта с раскраской  $\chi: (x_1, \dots, x_n) \rightarrow x_1 + \dots + x_n$ .)

**Упражнение 4.4.** Пусть  $G(k^n)$  обозначает  $n$ -мерное обобщение игры в крестики-нолики на  $n$ -мерную таблицу размера  $k \times k \times \dots \times k$  ( $n$  раз). Как обычно, игроки попеременно рисуют  $\times$  или  $0$  в свободных клетках (таблицы), и тот, кто первым полностью заполнит прямую  $k$  одинаковыми символами, будет победителем. Доказать, что для любого  $k$  при достаточно большом  $n$  первый игрок всегда может выиграть. (Именно эта постановка навела Халеса и Джеветта на мысль о теореме.)

## Глава 5

# ТЕОРЕМА СЕМЕРЕДИ

Теорема ван дер Вардена, гарантирующая существование одноцветного класса, содержащего сколь угодно длинную арифметическую прогрессию, не указывает, какой именно класс обладает этим свойством. Более чем 45 лет назад Эрдёш и Туран [ET] выдвинули следующее предположение: если множество натуральных чисел  $A$  имеет положительную верхнюю плотность,

т. е. выполняется

$$\limsup_N (|A \cap [1, N]|/N) > 0, \quad (*)$$

то это  $A$  содержит произвольно длинные арифметические прогрессии (А. П.).

Таким образом, из этой гипотезы следовало бы, что длинные А. П. всегда присутствуют в «наиболее часто встречающемся» цвете. В 1953 г. К. Ф. Рот [Ro] доказал, что из соотношения (\*) следует, что  $A$  всегда содержит трехчленную А. П. В 1969 г. Е. Семереди [Sz1] показал, что из (\*) следует существование четырехчленной А. П., принадлежащей  $A$ . Наконец, в 1975 г. Семереди тонкими комбинаторными рассуждениями установил справедливость этой гипотезы в общем случае [Sz2]. Полное доказательство выходит за рамки настоящей работы. Здесь мы изложим очень упрощенный вариант этого доказательства для трехчленных А. П., который содержит многие из существенных моментов общего случая.

**Теорема (Рот).** Пусть  $c > 0$ . Если  $A \subseteq [n]$ , причем  $|A| \geq cn$  и  $n$  достаточно велико, то  $A$  содержит трехчленную А. П.

**Доказательство (Семереди).** Теорема будет следовать из ряда лемм и утверждений. Прежде всего потребуется следующий результат.

**Лемма.** Пусть  $\alpha = 2 + \sqrt{3}$ . Для  $k \geq 0$  определим числа  $l_k = \alpha n^{1-1/2^k}$ . Пусть  $A = \{a_1 < \dots < a_l\} \subseteq [n]$  и  $l \geq l_k$ . Тогда существуют  $a$  и  $x_0, \dots, x_k > 0$ , такие, что

$$M(a; x_0, \dots, x_k) = \left\{ a + \sum_{i=0}^k \varepsilon_i x_i, \varepsilon_i = 0, 1 \right\} \subseteq A.$$

**Доказательство.** Используем индукцию по  $k$ . Во-первых, заметим, что для всех  $k \geq 1$

$$\begin{aligned} \binom{l_k}{2} &\geq (l_k - 1)^2/2 = (\alpha n^{1-1/2^k} - 1)^2/2 \geq \\ &\geq (\alpha - 1)^2 n^{2-2/2^k}/2 = \alpha n^{2-1/2^{k-1}} = n l_{k-1}, \end{aligned} \quad (5.1)$$

поскольку  $(\alpha - 1)^2/2 = \alpha$  и  $n \geq 1$ .

При  $k = 0$  имеем  $l_0 = \alpha n \geq \alpha > 3$ , и, следовательно, утверждение леммы очевидно. Предположим, что для некоторого  $k \geq 1$  утверждение леммы справедливо для всех значений, меньших  $k$ , и предположим также, что  $A \subseteq [1, n]$  и  $|A| = l \geq l_k$ . Среди  $\binom{l_k}{2}$  разностей  $a_i - a_j$ ,  $i > j$ , по крайней мере  $l_{k-1}$

должны быть равны между собой, так как, согласно (5.1), выполняется неравенство  $\frac{1}{n} \binom{l_k}{2} \geq l_{k-1}$ , и при этом все разности принадлежат  $[n]$ . Таким образом, имеем  $a_{i_1} - a_{j_1} = a_{i_2} - a_{j_2} = \dots = a_{i_m} - a_{j_m} = d > 0$  для некоторого  $m \geq l_{k-1}$ . Применяя предположение индукции к  $A' = \{a_{j_1}, \dots, a_{j_m}\}$ , получаем, что для некоторого  $a$  и  $x_0, \dots, x_{k-1}$  выполняется включение  $\{a + \sum_{i=0}^{k-1} \epsilon_i x_i : \epsilon_i = 0, 1\} \subseteq A'$ . Положим  $x_k = d$ . Тогда для  $a$  и  $x_0, \dots, x_{k-1}, x_k$  выполняется утверждение леммы, поскольку  $a' \in A' \Rightarrow a' + d \in A$ .  $\square$

**Следствие.** Предположим, что  $A \subseteq [n]$ , причем  $|A| \geq cn$  для некоторой фиксированной константы  $c > 0$ . Тогда для достаточно большого  $n$  некоторые  $M(a; x_0, \dots, x_k) \subseteq A$  и  $k \geq \log \log n + O(1)$ .

**Доказательство.** Если  $k < (\log \log n - \log(\log \alpha - \log c)) / \log 2$ , то  $2^k (\log \alpha - \log c) < \log n$ , т. е.  $cn > \alpha n^{1-1/2^k}$ . Утверждение сразу следует из леммы.  $\square$

Заметим, что следствие также выполняется, если  $A \subseteq [m+1, m+n]$  при  $|A| \geq cn$  и произвольном  $m$ . Предположим теперь, что теорема неверна, т. е. для фиксированного  $c > 0$ , для бесконечно многих  $n$  существует  $A(n) \subseteq [n]$ ,  $|A(n)| \geq cn$ , такое, что это  $A(n)$  не содержит трехчленной А. П. Для каждого  $l$  через  $f(l)$  обозначим число элементов наибольшего подмножества  $[l]$ , не содержащего трехчленной А. П. Предположим без ограничения общности, что  $|A(n)| = f(n)$ , и положим  $c_0 = \limsup_{l \rightarrow \infty} (f(l)/l)$ .

**Утверждение 1.**  $\lim_{l \rightarrow \infty} (f(l)/l) = c_0$ .

**Доказательство.** Достаточно показать, что  $\liminf_{l \rightarrow \infty} (f(l)/l) \geq c_0$ . Предположим противное, т. е. что  $\liminf_{l \rightarrow \infty} (f(l)/l) = c' < c_0$ . Таким образом, для некоторого  $\varepsilon > 0$  существуют  $l'_1, l'_2, \dots$ , такие, что  $f(l'_k)/l'_k < c_0 - \varepsilon$ . По определению  $c_0$  существуют  $l'_1, l'_2, \dots$ , такие, что  $|A(l'_k)| = f(l'_k) > (c_0 - \varepsilon/2)l'_k$  при всех  $k$ . Выберем большое  $m$  (определяемое позже) и для произвольного фиксированного  $k$  положим  $l'_m = Nl'_k + r$ , где  $0 \leq r < l'_k$ . Разобьем множество  $[l'_m]$  на  $N$  непересекающихся подынтервалов длины  $l'_k$ , скажем  $I_1, \dots, I_N$  (рис. 5.1). Согласно выбору  $l'_k$ , каждое  $I_j$  может иметь не более  $f(l'_k) < (c_0 - \varepsilon)l'_k$  элементов из  $A(l'_m)$ . Таким образом, полное число элементов из  $A(l'_m)$  в  $[1, l'_m]$

не превосходит  $N(c_0 - \varepsilon)l_k + r$ . Значит,

$$(c_0 - \varepsilon/2)l'_m < |A(l'_m)| < N(c_0 - \varepsilon)l_k + l_k, \\ (c_0 - \varepsilon/2)(Nl_k) < Nl_k(c_0 - \varepsilon) + l_k, \quad Nl_k\varepsilon < 2l_k,$$

и  $N < 2/\varepsilon$ . Однако последнее неравенство не выполняется для достаточно большого  $N$ .  $\square$

Выберем теперь малое фиксированное  $\varepsilon > 0$ , определяемое позже. Для достаточно большого  $l_0$ , согласно утверждению 1,

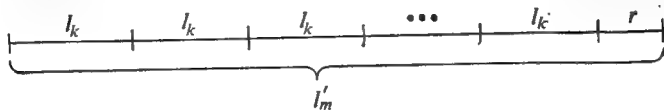


Рис. 5.1.

при всех  $l > \log \log l_0$  выполняются неравенства  $c_0 - \varepsilon < f(l)/l < c_0 + \varepsilon$ . Выберем некоторое  $l \geq l_0$  и положим  $A = A(l)$ . Разобьем множество  $[l]$  на  $l^{1/2} + O(1) = l'$  непересекающихся подынтервалов длины  $l^{1/2} + O(1)$  и обозначим их  $J_1, J_2, \dots, J_{l'}$ .

**Утверждение 2.** Существует  $j$ , такое, что

- (1)  $|J_j \cap A| > c_0 l^{1/2}/2$ ;
- (2)  $|j - l^{1/2}/2| \leq 2\varepsilon l^{1/2}/c_0$ .

**Доказательство.** Согласно выбору  $l$  и определению  $J_i$ , для всех  $i$  выполняется неравенство  $|J_i \cap A| \leq (c_0 + \varepsilon)l^{1/2}$ . Таким образом, если  $|J_j \cap A| \leq c_0 l^{1/2}/2$  для всех  $j$ , удовлетворяющих п. (2), то

$$|A| = \bigcup_{i=1}^{l'} |J_i \cap A| \leq \frac{4\varepsilon}{c_0} l^{1/2} \cdot \frac{c_0}{2} l^{1/2} + l^{1/2} \left(1 - \frac{4\varepsilon}{c_0}\right) (c_0 + \varepsilon) l^{1/2} + \\ + o(l) \leq l \left(2\varepsilon + c_0 - 4\varepsilon - \frac{4\varepsilon^2}{c_0}\right) + o(l) < l(c_0 - \varepsilon)$$

для достаточно большого  $l$ , что противоречит тому, что  $|A| = f(l) > (c_0 - \varepsilon)l$ .  $\square$

Обозначим через  $J$  интервал  $J_j$  (с индексом  $j$ ) из утверждения 2. Согласно следствию, можно найти некоторые  $M(a; x_0, \dots, x_k) \subseteq J$  с  $k \geq \log \log l^{1/2} + O(1)$ , что обеспечивается достаточно большим  $l$  (как функции  $c_0$  и  $\varepsilon$ ). Можно положить  $k = \log \log l + O(1)$ . Заметим, что  $x_i \leq l^{1/2} + O(1)$  при всех  $i$ .

Положим  $J' = \{x \in [l]: x < J\}$ ,  $J'' = \{x \in [l]: x > J\}$ . Пусть  $M_i$  обозначает множество  $M(a; x_0, \dots, x_i)$  для  $-1 \leq i \leq k$ , где

$M_{-1} = \{a\}$ . Определим  $N_i$  для  $-1 \leq i \leq k$  по правилу:  $N_i = \{j'' \in J'' : \{j', m_i, j''\} \text{ есть трехчленная А. П. для некоторых } j' \in A \cap J', m_i \in M_i\}$ .

**Утверждение 3.**  $|N_{i+1}| = |N_i \cup (N_i + 2x_{i+1})| + O(l^{1/2})$ ,  $-1 \leq i < k$ .

*Доказательство.* Множества  $N_{i+1}$  и  $N_i \cup (N_i + 2x_{i+1})$  разнятся лишь теми трехчленными А. П., в которых либо  $x$  очень мало, т. е.  $x \in J$ , либо  $x$  очень велико, т. е.  $x > l$ . В первом случае ошибка не превосходит  $O(l^{1/2})$ , так как  $|J| = l^{1/2}$ , а во втором ошибка не превосходит  $O(l^{1/2})$  в силу п. (2) утверждения 2.  $\square$

Заметим, что поскольку  $N_{i+1} \supseteq N_i$ , то

$$\begin{aligned} |N_i| &\geq |N_{-1}| = |A \cap J'| + O(l^{1/2}) \geq |A| - |A \cap (J \cup J'')| + O(l^{1/2}) \geq \\ &\geq (c_0 - \varepsilon)l - (c_0 + \varepsilon)|J \cup J''| + O(l^{1/2}) \geq \\ &\geq (c_0 - \varepsilon)l - (c_0 + \varepsilon)(l^{1/2})(l^{1/2}/2 + 2\varepsilon l^{1/2}/c_0 + 1) + O(l^{1/2}) = \\ &= l(c_0/2 - 7\varepsilon/2) + O(l^{1/2}). \end{aligned} \quad (5.2)$$

Кроме того, поскольку  $|N_d| < l$ ,  $k = \log \log l + O(1)$  и  $N_i$  возрастают, то для некоторого  $i$  должно выполняться

$$|N_{i+1} - N_i| < l/(\log \log l). \quad (5.3)$$

Рассмотрим некоторый произвольный класс вычетов по модулю  $2x_{i+1}$  в  $J''$ , скажем  $C_j \equiv \{x \in J'' : x \equiv j \pmod{2x_{i+1}}\}$ . Назовем подмножество  $B = \{b_1 < \dots < b_t\} \subseteq C_j$  блоком множества  $N_i$ , если

- (1)  $b_{s+1} = b_s + 2x_{i+1}$  для  $1 \leq s < t$ ;
- (2)  $b_s \in N_i$  для  $1 \leq s \leq t$ ;
- (3)  $b_1 - 2x_{i+1} \notin N_i$ ,  $b_t + 2x_{i+1} \notin N_i$ .

За исключением краевых случаев, каждый блок множества  $N_i$  порождает по крайней мере один новый элемент при переходе от  $N_i$  к  $N_{i+1}$ . Таким образом, из (5.3) видим, что  $N_i$  имеет не более  $l/(\log \log l) + O(l^{1/2})$  блоков, когда  $j$  пробегает по всем классам вычетов по модулю  $2x_{i+1}$  (мажорирование  $x_{i+1}$  и  $|J|$  обеспечивает включение концевых эффектов в остаточный член  $O(l^{1/2})$ ).

Поскольку по предположению  $A$  не содержит трехчленной А. П., то

$$A \cap N_i = \emptyset. \quad (5.4)$$

Для каждого  $j$ ,  $0 \leq j < 2x_{i+1}$ , рассмотрим элементы из  $J'' - N_i$ , которые сравнимы с  $j$  по модулю  $2x_{i+1}$ . Это элементы, которые не принадлежат блокам из  $N_i$ . Назовем множества элементов, сравнимых с  $j$  по модулю  $2x_{i+1}$ , которые попадают между двумя



последовательными блоками множества  $N_i$ , дырами множества  $N_i$ . Таким образом, имеется не более  $l/(\log \log l) + O(l^{1/2})$  дыр в  $N_i$ , когда  $j$  пробегает все классы вычетов по модулю  $2x_{i+1}$ . Дыру  $G$  множества  $N_i$  назовем *маленькой*, если  $|G| \leq \leq \log \log \log l$ ; в противном случае  $G$  называется *большой*.

Если дыра  $G$  маленькая, то она содержит не более  $|G| \leq \leq \log \log \log l$  точек из  $A$ . Таким образом, полное число точек из  $A$ , принадлежащих маленьким дырам в  $N_i$ , не превосходит

$$(l/(\log \log l) + O(l^{1/2})) \log \log \log l = o(l).$$

Если  $G$  — большая дыра в  $N_i$ , то, по определению  $l_0$ , она содержит не более  $|G| (c_0 + \varepsilon)$  точек из  $A$ . Конечно, все, кроме  $O(l^{1/2})$  точек из  $J'' - N_i$ , принадлежат либо малым, либо большим дырам. Стало быть,

$$\begin{aligned} |A \cap J''| &\leq (|J''| - |N_i|)(c_0 + \varepsilon) + o(l) \leq \\ &\leq [l(1/2 + 2\varepsilon/c_0) - l(c_0/2 - 7\varepsilon/2)](c_0 + \varepsilon) + o(l) \leq \\ &\leq (l/2)(c_0 - 6\varepsilon) + o(l), \end{aligned}$$

что обеспечивается выбором  $\varepsilon$  при  $\varepsilon \leq c_0^2/25$ . Однако это влечет за собой, что

$$\begin{aligned} |A \cap J'| &= |A| - |A \cap J''| - |A \cap J| \geq \\ &\geq l(c_0 - \varepsilon) - (l/2)(c_0 - 6\varepsilon) + o(l) = (l/2)(c_0 + 2\varepsilon) + o(l). \end{aligned}$$

А это в свою очередь противоречит тому, что  $|J'| = l/2 + + O(l^{1/2})$ . Тем самым теорема доказана.  $\square$

**Две волнующие гипотезы.** Было бы весьма интересно выяснить справедливость следующей гипотезы<sup>1)</sup>. Она так же соотносится с теоремой Семереди, как результат Халеса — Джеветта с теоремой ван дер Вардена.

**Гипотеза.** Для любого конечного множества  $A$  и положительного  $\varepsilon$  существует  $M = M(A, \varepsilon)$ , такая, что если  $n \leq M$  и  $R \subseteq A^n$ :  $|R| > \varepsilon |A|^n$ , то  $R$  содержит (комбинаторную) прямую<sup>2)</sup>.

Другими словами, верно ли, что если  $R \subseteq A^n$  имеет «плотность» по крайней мере  $\varepsilon$  для некоторого  $\varepsilon > 0$  и  $n$  достаточно велико, то это  $R$  содержит прямую? (Из этой гипотезы также следует теорема Семереди.)

<sup>1)</sup> Это усиленный вариант гипотезы Л. Мозера [М] (см. [Chv1]).

<sup>2)</sup> Определение см. в предыдущей главе.

Для  $|A|=2$  гипотезу можно доказать с использованием классического результата Шпернера: если  $F$  — семейство подмножеств множества  $[n]$ , такое, что  $X, Y \in F \Rightarrow X \not\subseteq Y \not\subseteq X$ , то  $|F| \leq \binom{n}{[n/2]}$ .

*Доказательство гипотезы для  $|A|=2$ .* Пусть  $A = \{0, 1\}$ , и предположим, что  $R \subseteq A^n$  не содержит прямой. Заметим, что прямая в  $A^n$  есть в точности пара  $n$ -ок  $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n)$ ,  $\bar{x}' = (x'_1, \dots, x'_n)$  с  $x_i, x'_i \in \{0, 1\}$ ,  $x_i \leq x'_i$ , причем для по крайней мере одного индекса  $j$  справедливо  $x_j = 0$ ,  $x'_j = 1$ . Если интерпретировать  $\bar{x}$  и  $\bar{x}'$  как характеристические функции подмножеств  $S(\bar{x})$  и  $S(\bar{x}')$  из  $[n]$  в обычном смысле, т. е.  $i \in S(\bar{x}) \Leftrightarrow x_i = 1$ , то условие, что  $\bar{x}$  и  $\bar{x}'$  образуют прямую, эквивалентно тому, что  $S(\bar{x})$  — собственное подмножество  $S(\bar{x}')$ . Таким образом, по теореме Шпернера может быть не более чем  $\binom{n}{[n/2]} < c2^n/\sqrt{n}$  подмножеств  $S(\bar{x})$  для некоторого  $c > 0$  и, следовательно,  $|R| < c2^n/\sqrt{n}$ , что влечет за собой гипотезу.  $\square$

Пока даже для случая  $|A|=3$  нет хороших предположений о структуре максимальных подмножеств  $R^* \subseteq A^n$  без комбинаторной прямой. Один естественный подход состоит в том, чтобы взять за  $A$  множество  $\{0, 1, 2\}$  и положить  $R_W = \{(x_1, \dots, x_n) \in A^n : \sum_{i=1}^n x_i \in W\}$  для подходящего множества  $W \subseteq \{0, 1, \dots, 3n\}$ . (В случае  $A = \{0, 1\}$  экстремальные конструкции имеют вид  $R^* = R_W$ , где  $W = \{[n/2]\}$  или  $W = \{n - [n/2]\}$ .) В частности, если  $W$  не содержит трехчленной  $A$ . П., то  $R_W$  не содержит прямой. (Это выполняется для  $|A|=n$ .) Однако теорема Рота (или теорема Семереди в общем случае) показывает, что  $W = o(n)$ , а это в свою очередь дает  $|R_W| = (o|A|)^n$  — совсем не то, что нам нужно!

По традиции, введенной Эрдёшем, автор предлагает 100 американских долларов<sup>1)</sup> за доказательство или опровержение этой гипотезы для случая  $|A|=3$ .

Мы заканчиваем этот раздел замечательной гипотезой Эрдёша (3000 \$), из которой также следует теорема Семереди.

**Гипотеза Эрдёша.** Если  $A$  — множество натуральных чисел, такое, что  $\sum_{a \in A} (1/a) = \infty$ , то  $A$  содержит сколь угодно длинную арифметическую прогрессию.

Нужно заметить, что совсем недавно Фюрстенберг дал доказательство теоремы Семереди, используя новые методы из эргодической теории. Некоторые из них будут отмечены в гл. 11.

<sup>1)</sup> Как говорит Эрдёш, возможны замены на западногерманские марки, золото, бриллианты или нефть — кто что предпочитает.

## Глава 6

## РАМСЕЕВСКАЯ ТЕОРИЯ ГРАФОВ

Рамсеевская теория графов — это область, которая за последние 10 лет проделала путь от своего зарождения до превращения в один из наиболее активных разделов общей теории Рамсея. В настоящей главе обсуждаются лишь отдельные результаты из всего имеющегося обилия — те, которые наиболее полно отражают многообразие рассматриваемых вопросов и техники, используемой в этой области.

Первые работы в области рамсеевской теории графов были написаны в надежде на то, что эти исследования в конце концов приведут к методам вычисления больших значений классических чисел Рамсея  $R(m, n)$ . Однако, как это часто случается в математике, надежда осталась нереализованной, а из исследований выросла отдельная самостоятельная дисциплина. Вероятно, можно даже утверждать, что результаты рамсеевской теории графов сами по себе более ценны и интересны, нежели знание точного значения  $R(5, 5)$  (или даже  $R(m, n)$ ).

Основная задача, с которой имеет дело рамсеевская теория графов, формулируется следующим образом: для произвольного (фиксированного) графа  $G$  определить то наименьшее целое  $R = R(G)$ , при котором во всякой 2-раскраске ребер графа  $K_R$  найдется одноцветный подграф, изоморфный исходному графу  $G$ . В случае классических чисел Рамсея в качестве  $G$  берется полный граф. Когда вместо двух используется  $k$  цветов, вместо  $R(G)$  будем употреблять обозначение  $R(G; k)$ .

Точно так же, как и в классическом случае, допустимо рассматривать и более общую «внедиагональную» ситуацию. Имено; для графов  $G_1, \dots, G_k$  символом  $R(G_1, \dots, G_k)$  будем обозначать наименьшее целое  $R$ , такое, что вне зависимости от  $k$ -раскраски ребер графа  $K_R$  для некоторого  $i$  в  $i$ -м цвете существует копия графа  $G_i$ . Существование чисел  $R(G_1, \dots, G_k)$ , разумеется, гарантируется теоремой Рамсея.

Начнем с одного из простейших и наиболее общих результатов рамсеевской теории графов. Пусть для графа  $G$  (в котором всегда предполагается отсутствие изолированных вершин)  $\chi(G)$  обозначает его хроматическое число<sup>1)</sup>, а  $s(G)$  — мощность его наибольшей компоненты связности.

<sup>1)</sup> То есть наименьшее число цветов, необходимых для такой раскраски вершин  $G$ , при которой нет пары одноцветных вершин, соединенной ребром.

**Теорема 6.1** (Хватал — Харари [ChvH2]).

$$R(G, H) \geq (\chi(G) - 1)(c(H) - 1) + 1. \quad (6.1)$$

*Доказательство.* Положим  $m = (\chi(G) - 1)(c(H) - 1)$  и рассмотрим граф  $K_m$  как  $\chi(G) - 1$  копий графа  $K_{c(H)-1}$  вместе со всеми ребрами, соединяющими все пары вершин разных копий графа  $K_{c(H)-1}$ . Покрасим все ребра копий графа  $K_{c(H)-1}$  в цвет 2, а все добавочные ребра (между копиями) в цвет 1. Конечно, при такой раскраске нет копии графа  $G$  цвета 1, поскольку если бы она была, то мы могли бы покрасить вершины этой копии в  $\chi(G) - 1$  цветов — по номеру той копии графа  $K_{c(H)-1}$ , в которой они лежат, а это противоречит определению  $\chi(G)$ . С другой стороны, нет и копии графа  $H$  цвета 2, поскольку наибольшая связная компонента графа  $K_m$  цвета 2 имеет  $c(H) - 1$  вершин.  $\square$

Теорема 6.1 используется в одном весьма элегантном результате рамсеевской теории графов, принадлежащем Хваталу.

**Теорема 6.2** [Chv2]. Для любого  $m$ -вершинного дерева  $T_m$  выполняется равенство

$$R(T_m, K_n) = (m - 1)(n - 1) + 1. \quad (6.2)$$

*Доказательство.* Нижняя оценка следует из (6.1), так что нужно лишь показать, что

$$R(T_m, K_n) \leq (m - 1)(n - 1) + 1. \quad (6.3)$$

При  $m = 2$  или  $n = 2$  это очевидно. Предположим, что (6.3) выполняется при всех значениях  $m'$  и  $n'$ , таких, что  $m' + n' < m + n$ . Рассмотрим 2-раскраску графа  $K_{(m-1)(n-1)+1}$  в красный и синий цвета. Пусть  $T'$  — дерево, образованное из  $T$  удалением некоторой концевой вершины  $x$  ( $x$  смежна вершине  $y$  в  $T_m$ ). По предположению индукции наш граф  $K_{(m-1)(n-1)+1}$  содержит либо синий  $K_n$  (и тогда все закончено), либо красное  $T'$ . Таким образом, предполагаем наличие красного дерева  $T'$  в графе  $K_{(m-1)(n-1)+1}$ . Удаляя  $m - 1$  точек этого красного  $T'$ , получаем 2-раскрашенный граф  $K_{(m-1)(n-2)+1}$ . И вновь, по предположению индукции, этот граф содержит либо красное дерево  $T$ , либо синий граф  $K_{n-1}$ ; очевидно, можем предположить наличие именно последнего подграфа.

Следовательно, в исходном  $K_{(m-1)(n-1)+1}$  имеется красное дерево  $T'$  и синий граф  $K_{n-1}$ , не пересекающиеся между собой. Обратимся, наконец, к ребрам, соединяющим  $y$  с синим  $K_{n-1}$ . Если какое-то из них красное, то имеем красное дерево  $T_m$ , если же все они синие, то это дает синий граф  $K_n$ . Это завершает индукционный переход, а значит, и доказательство теоремы.  $\square$

Известно сравнительно немного точных нетривиальных значений  $R(G, H)$ ; одно из самых интересных представляет

**Теорема 6.3 [Bu1].** Пусть  $T_m$  — дерево с  $m$  вершинами и  $(m-1)$  делит  $(n-1)$ . Тогда

$$R(T_m, K_{1,n}) = m + n - 1. \quad (6.4)$$

*Доказательство.* Во-первых, покажем, что

$$R(T_m, K_{1,n}) \geq m + n - 1. \quad (6.5)$$

Пусть  $k = (n-1)/(m-1)$ . Образует 2-раскрашивание  $K_{m+n-2}$ , взяв  $k+1$  копий графа  $K_{m-1}$  (все полностью красные) и соединив их всеми синими ребрами. Такая раскраска не содержит красного дерева  $T_m$  как имеющего  $m$  вершин. Но она же и не содержит синего  $K_{1,n}$ , поскольку наибольшая синяя степень в  $K_{m+n-2}$  равна  $k(m-1) = n-1$ . Это доказывает (6.5).

Далее покажем, что

$$R(T_m, K_{1,n}) \leq m + n - 1. \quad (6.6)$$

При  $m=2$  это очевидно так. Как и в доказательстве предыдущей теоремы, образуем дерево  $T'$  удалением висячей вершины  $x$  из  $T_m$  ( $x$  связана с  $y$  в  $T_m$ ). В 2-раскрашенном графе  $K_{m+n-1}$ , согласно предположению индукции, найдется либо синий  $K_{1,n}$  (и тогда все закончено), либо красное дерево  $T'$ , так что можем предполагать наличие именно последнего. Поскольку имеется  $m+n-1-(m-1)=n$  вершин  $v_i$  графа  $K_{m+n-1}$ , которые не являются вершинами красного  $T'$ , и  $K_{m+n-1}$  не содержит синего  $K_{1,n}$ , то некоторое ребро из  $y$  в некоторую вершину  $v_i$  должно быть красным. Но это дает красное дерево  $T$  в  $K_{m+n-1}$ . Таким образом, согласно предположению индукции, неравенство (6.6) выполнено, а тем самым и вся теорема доказана.  $\square$

Случай, когда  $(m-1)$  не делит  $(n-1)$ , много более сложен и полностью не изучен. Однако и здесь выполняются неравенство (6.6) и для почти всех деревьев  $T_m$  для достаточно больших  $n$  равенство  $R(T_m, K_{1,n}) = n + m - 2$ .

В рамсеевской теории графов особого внимания заслуживает класс графов, состоящих из непересекающихся копий конкретного графа. Прекрасным примером тому служит результат, принадлежащий Буру, Эрдёшу и Спенсеру [BuES], о графе  $nK_3$ , состоящем из  $n$  непересекающихся треугольников.

**Теорема 6.4.**

$$R(nK_3) = 5n, \quad n \geq 2. \quad (6.7)$$

*Доказательство.* Напомним, что для  $n=1$  мы уже знаем, что  $R(K_3)=6$ . Дабы убедиться в том, что  $R(nK_3) \geq 5n$ ,

рассмотрим 2-раскраску графа  $K_{5n-1}$ , как на рис. 6.1. Легко проверяется, что эта 2-раскраска  $K_{5n-1}$  не содержит одноцветного  $nK_3$ .

Далее индукцией по  $n$  покажем, что

$$R(nK_3) \leq 5n, n \geq 2. \quad (6.8)$$

Сначала рассмотрим случай  $n = 2$ . Зафиксируем некоторую 2-раскраску графа  $K_{10}$  (на вершинах  $\{1, 2, \dots, 10\}$ ) и предположим, что она не содержит одноцветного  $2K_3$ . Таким образом,

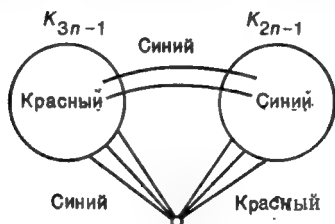


Рис. 6.1.

должны существовать непересекающиеся красный и синий треугольники  $K_3$ ; пусть для определенности это будут: красный —  $\{1, 2, 3\}$  и синий —  $\{4, 5, 6\}$ . Рассмотрим ребра между  $\{1, 2\}$  и  $\{4, 5, 6\}$ . Непосредственной проверкой удостоверяемся в наличии

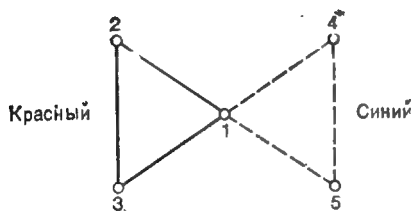


Рис. 6.2. Бантик.

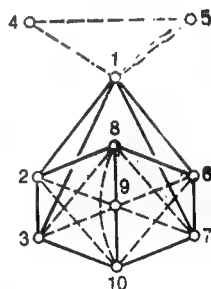


Рис. 6.3.

«бантика» (рис. 6.2) на этих вершинах, т. е. пары треугольников разных цветов, соединяющихся в одной вершине. Без ограничения общности можно предполагать, что бантик именно таков, как на рис. 6.2.

Далее рассмотрим шесть вершин  $\{1, 6, 7, 8, 9, 10\}$ . В силу равенства  $R(K_3) = 6$  эти шесть вершин содержат одноцветный граф  $K_3$ . Если он не пересекается с нашим бантиком, то получаем требуемый  $2K_3$ , и все сделано. Поэтому предполагаем одноцветность треугольника  $\{1, 6, 7\}$ : пусть он красный. На том же

основании пять вершин  $\{6, 7, 8, 9, 10\}$  должны давать 2-раскрашенный граф  $K_5$ , не содержащий одноцветного  $K_3$ . Легко видеть, что это возможно только, если ребра графа  $K_5$  образуют два непересекающихся одноцветных 5-цикла. Таким образом, без ограничения общности можем предположить, что ребра  $\{6, 7\}, \dots, \{10, 6\}$  красные, а ребра  $\{6, 8\}, \dots, \{9, 6\}$  синие. Аналогично дополнение бантика  $\{1, 4, 5, 6, 7\}$  должно быть также свободно от одноцветных  $K_3$ . Поэтому, как и ранее, можем предполагать, что ребра  $\{2, 3\}, \dots, \{10, 2\}$  красные, а ребра  $\{2, 8\} \dots \{9, 2\}$  синие (рис. 6.3).

Теперь, если или  $\{2, 6\}$ , или  $\{3, 7\}$  синий, то либо  $\{2, 6, 9\}$ , либо  $\{3, 7, 9\}$  дают синий граф  $K_3$ , не пересекающийся с  $\{1, 4, 5\}$ . С другой стороны, если  $\{2, 6\}$  и  $\{3, 7\}$  красные, то  $\{2, 6, 8\}$  и  $\{3, 7, 10\}$  суть два непересекающихся красных треугольника. Это показывает, что  $R(2K_3) \leq 10$ .

Наконец, для  $n \geq 3$  можно, как и раньше, вывести существование бантика на некоторых пяти вершинах 2-раскрашенного графа  $K_{5n}$ . Удалим эти пять вершин; тогда, согласно предположению индукции, найдется одноцветный  $(n-1)K_3$  в оставшемся  $K_{5n-5}$ . Это вместе с одноцветным  $K_3$  из бантика и даст одноцветный граф  $nK_3$ .  $\square$

Приведем теперь несколько результатов для случая, когда число цветов  $k$  может превышать 2. Лучший общий результат для деревьев составляют следующие оценки Эрдёша и Грэхема [EG].

**Теорема 6.5.** Для дерева  $T_m$  с  $t$  ребрами имеют место оценки

$$(t-1) \lfloor (k+1)/2 \rfloor < R(T_m; k) \leq 2tk + 1. \quad (6.9)$$

**Доказательство.** Для доказательства нижней оценки в (6.9) положим  $t = \lfloor (k+1)/2 \rfloor$  и рассмотрим  $K_{t(m-1)}$  как  $t$  копий графа  $K_{m-1}$ , занумерованных числами от 1 до  $t$ :  $K_{m-1}^{(1)}, \dots, K_{m-1}^{(t)}$ . Раскрасим в цвет  $i$  все ребра между  $K_{m-1}^{(i)}$  и  $K_{m-1}^{(j)}$  для  $1 \leq i < j \leq t$  и в цвет  $t-1+i$  все ребра в  $K_{m-1}^{(i)}$ . Это дает  $(2t-1)$ -раскрашивание графа  $K_{t(m-1)}$  без одноцветного дерева  $T_m$ . Так как  $2t-1 \leq k$ , левая часть (6.9) доказана.

Для доказательства правой части (6.9) воспользуемся тем фактом, что для всех  $d$  любой граф  $G$  с  $d$  вершинами и  $md$  ребрами содержит в качестве подграфа любое  $m$ -реберное дерево  $T_m$ .

**Упражнение 6.1.** Докажите этот факт.

Во всяком  $k$ -раскрашивании графа  $K_{2km+1}$  по крайней мере  $k^{-1} \binom{2mk+1}{2}$  ребер должны иметь один и тот же цвет. Поскольку

это есть (одноцветный) граф с  $2kt + 1$  вершинами и по крайней мере  $t(2kt + 1)$  ребрами, то, согласно приведенному замечанию, он содержит одноцветную копию графа  $T_m$ , и тем самым правая часть (6.9) доказана.  $\square$

Верхнюю оценку в (6.9) для достаточно большого  $k$  можно усилить до

$$R(T_m; k) < (m-1)k + 4, \quad (6.9')$$

если справедлива

**Гипотеза Эрдёша и Шош [E2].** Любой  $d$ -вершинный граф с  $[(m-1)d/2] + 1$  ребрами содержит в себе в качестве подграфа любое  $m$ -реберное дерево  $T_m$ .

Вполне возможно, что именно (6.9') дает правильную асимптотику роста для графа  $R(T_m; k)$ . Основанием такому предположению служит, например,

**Теорема 6.6 [EG].** Для достаточно большого  $k$  и  $m$ -реберного дерева  $T_m$  справедливо неравенство

$$R(T_m; k) > (m-1)k - m^2.$$

**Доказательство.** Для целого  $k$  через  $k_0$  обозначаем наибольшее целое, не превосходящее  $k$  и сравнимое с 1 по модулю  $m$ . Согласно глубокому результату Рай-Чаудхури и Вильсона [RW], всегда существует разрешимая уравновешенная неполная блок-схема  $D_{k_0, n}$ , имеющая  $(m-1)k_0 + 1$  точек и  $k_0(k_0m - k_0 + 1)/m$  блоков объема  $m$ , существование которой обеспечивается лишь тем, что  $k_0$  достаточно велико. Отождествим точки схемы  $D_{k_0, n}$  с вершинами полного графа  $K_{(m-1)k_0+1}$ . Припишем цвет  $i$  всем тем ребрам графа  $K_{(m-1)k_0+1}$ , которые соответствуют парам точек, принадлежащим  $i$ -му параллельному классу схемы  $D_{k_0, n}$ . Это дает  $k_0$ -раскрашивание графа  $K_{(m-1)k_0+1}$ , которое не содержит одноцветного связного подграфа с  $m+1$  вершинами. А так как  $k_0 > k - m$ , то это даст  $k$ -раскрашивание графа  $K_{(m-1)k-m}$  без одноцветного  $T_m$ .  $\square$

Известен ряд точных результатов о деревьях специального вида. Например, для  $P_3$ -пути с тремя ребрами Ирвингом [I] была доказана

**Теорема 6.7.**

$$R(P_3; k) = \begin{cases} 2k + 2, & k \equiv 1 \pmod{3}, \\ 2k + 1, & k \equiv 2 \pmod{3}, \\ 2k \text{ или } 2k + 1, & k \equiv 0 \pmod{3}. \end{cases} \quad (6.10)$$

Доказательство (6.10) также основывается на результатах работы [RW]. В действительности вычисление многих точных



значений рамсеевских чисел для графов зависит от существования (или отсутствия) некоторых специальных комбинаторных схем или алгебраических структур. Это, например, проявилось при вычислении классических чисел Рамсея  $R(3, 3, 3)$  и  $R(4, 4)$ , которое провели Гринвуд и Глисон [GrG].

Поучительно сравнить рамсеевские числа для  $P_3$  и для  $C_4$  — цикла на 4-х вершинах. Оказывается, что рамсеевские числа для  $C_4$  растут много более быстро, чем для  $P_3$ .

**Теорема 6.8** (Чжан и Грэхем [ChG]).

$$R(C_4; k) \leq k^2 + k + 2 \text{ для всех } k. \quad (6.11)$$

Если  $k - 1$  есть степень простого, то

$$R(C_4; k) \geq k^2 - k + 2. \quad (6.12)$$

**Доказательство.** Прежде всего нам понадобится оценка для наибольшего числа  $e$  ребер  $n$ -вершинного графа  $G$  без  $C_4$ . Пусть  $A = (a_{ij})$  обозначает матрицу смежности такого графа. Так как  $G \not\supset C_4$ , то для  $1 \leq i < i' \leq n$

$$\sum_{j=1}^n a_{i,j} a_{i',j} \leq 1. \quad (6.13)$$

Если  $c_i$  обозначает  $\sum_{j=1}^n a_{i,j}$ , то, суммируя (6.13) по всем  $i$  и  $i'$ , получаем

$$\sum_{i=1}^n c_i (c_i - 1) \leq n(n - 1). \quad (6.14)$$

Применяя неравенство Шварца к (6.14), получаем неравенство

$$2e = \sum_{i=1}^n c_i \leq n/2 + n \sqrt{n - 3/4}, \quad (6.15)$$

которое представляет собой широко известную оценку для  $|G|$ :  $G \not\supset C_4$ .

Предположим теперь, что ребра графа  $K_{k^2+k+2}$  раскрашены в  $k$  цветов. Тогда в один из цветов окрашено по крайней мере  $(1/k) \binom{k^2+k+2}{2}$  ребер. Если возьмем  $n = k^2 + k + 2$ ,  $e \geq (1/k) \times \binom{k^2+k+2}{2}$ , то видим, что соотношение (6.15) явно не выполняется. Это доказывает (6.11).

Для доказательства (6.12) воспользуемся хорошо известным фактом [Ru] о том, что если  $k - 1$  есть степень простого, то существует простое разностное множество  $D = \{d_1, \dots, d_k\}$  по

модулю  $(k^2 - k + 1)$ . Для каждого  $t$ ,  $1 \leq t \leq k$ , образуем циклическую (симметричную) матрицу  $B_t = (b_t(i, j))$  по правилу:

$$b_t(i, j) = \begin{cases} 1, & \text{если } i + j + d_t \equiv d_s \pmod{k^2 - k + 1} \\ & \text{для некоторого } d_s \in D, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Поскольку  $D$  — разностное множество, это влечет за собой, что для любых  $i, j \in \mathbb{Z}_{k^2-k+1}$  существует  $t$ , такое, что  $b_t(i, j) = 1$ . Кроме того, для каждого  $t$  нет двух строк матрицы  $B_t$ , имеющих общую пару единиц.

Образуем теперь  $k$ -раскрашивание графа  $K_{k^2-k+1}$  следующим образом. Вершинами графа  $K_{k^2-k+1}$  будут элементы пространства  $\mathbb{Z}_{k^2-k+1}$ . Для  $i, j \in \mathbb{Z}_{k^2-k+1}$  красим ребро  $\{i, j\}$  в цвет  $t$ , где  $t$  — наименьшее целое, такое, что  $b_t(i, j) = 1$ . Из предыдущих замечаний явствует, что это есть  $k$ -раскрашивание графа  $K_{k^2-k+1}$  без одноцветных  $C_4$ ; тем самым соотношение (6.12) доказано.  $\square$

И вновь в доказательстве нижней оценки проявляются комбинаторные структуры (на сей раз разностные множества). Из достаточной плотности распределения степеней простых, а также из (6.11) и (6.12) следует, что  $R(C_4; k) \sim k^2$  при  $k \rightarrow \infty$ .

Естественно предполагать, что поскольку  $C_3$  меньше, чем  $C_4$ , то  $C_3$  в некотором смысле много чаще появляется при  $k$ -раскрашивании полного графа, и, значит,  $R(C_3; k)$  должно быть существенно меньше, чем  $R(C_4; k)$ . В действительности, однако, имеет место в точности обратная ситуация, как это показывает

**Теорема 6.9 [EG].**

$$2^k < R(C_3; k) \leq 3k! \quad (6.16)$$

**Упражнение 6.2.** (а) Докажите неравенства (6.16). (Указание: индукция здесь весьма своеобразна.)

(б) Усиьте (6.16).

Причина столь разительного отличия в поведении  $R(C_4; k)$  и  $R(C_3; k)$  кроется в том факте, что для  $C_4$  имеет место много более «плотная» теорема, чем для  $C_3$ . Действительно, из неравенств (6.15) видно, что если  $G$  имеет  $m$  вершин и  $(m^{3/2}/2) + (m/4)$  ребер, то  $G$  должен всегда содержать  $C_4$ , в то время как теорема Турана (см. [Bo]) гласит, что  $G$  может иметь  $m^2/4$  ребер и не содержать  $C_3$ .

Конечно, разница между четными и нечетными циклами проявляется в теории графов довольно часто. Поэтому нет ничего удивительного в том, что она проявляется и здесь.

Для больших четных циклов известна (см. [EG])

**Теорема 6.10.**  $R(C_{2m}; k) > (k-1)(m-1) \quad \forall k, m$ . Если  $k \leq 10^m/201m$ , то  $R(C_{2m}; k) \leq 201km$ . Кроме того, существуют  $\alpha > 0$  и положительная функция  $g$ , такие, что при всяком  $\varepsilon > 0$  выполняются неравенства

$$\alpha k^{1+1/2m} < R(C_{2m}; k) < g(m, \varepsilon) k^{1+(1+\varepsilon)/(m-1)}.$$

Этот результат говорит о том, что  $R(C_{2m}; k)$  как функция от  $k$  растет линейно по  $k$ , пока  $k$  не превосходит довольно большой величины, после чего  $R$  растет как степень  $k$  (превосходящая 1).

Для нечетных циклов имеет место следующий аналог теоремы 6.9 [EG].

**Теорема 6.11.**  $2^k m < R(C_{2m+1}; k) < 2(k+2)!m$  для любых  $k$  и  $m$ .

*Вопрос Эрдёша:* верно ли, что для некоторого  $A$  выполняется неравенство  $R(C_3; k) < A^k$ ?

Неизвестно, выполняется ли  $R(C_5; k) > R(C_3; k)$  или даже  $R(C_{2m+1}; k) > R(C_3; k)$  для фиксированного  $m$  и достаточно большого  $k$ . Сам Эрдёш придерживается того мнения, что в действительности легче показать, что  $R(C_{2m+1}; k) < A^k$  для некоторого  $m > 1$  (особенно, если это верно!).

При желании изучать более медленно растущие рамсеевские числа нужно, естественно, перейти к рассмотрению  $R(F; k)$ , где  $F$  есть лес (т. е. ациклический граф) некоторого специального вида. Здесь имеется полезная информация [EG], хотя известные результаты и далеки от исчерпывающе полных.

**Теорема 6.12.** Если  $F_m$  — лес с  $m$  ребрами, то  $k(\sqrt{m}-1)/2 < R(F_m; k) < 4kt$ . Кроме того, если  $k \leq m^2$ , то  $R(F_m; k) > \alpha \sqrt{km}$  для подходящей положительной константы  $\alpha$ .

Мы опускаем доказательство (с которым можно ознакомиться в [EG]). Таким образом, для каждого леса  $F$  величина  $R(F; k)$  как функция от  $k$  растет по существу линейно для больших  $k$  (подобно поведению  $R(T; k)$  для деревьев  $T$ ). Однако при малых  $k$  вторая оценка показывает, что для  $R(F; k)$  остается возможность расти как  $\sqrt{k}$ . Следующий результат показывает, что это действительно может иметь место.

**Теорема 6.13.** Если  $k \leq m$ , то существует такая константа  $\alpha$ , что  $R(mK_{1,m}; k) < \alpha \sqrt{k} m^2$ . Если же  $k \geq 3m^2$ , то  $R(mK_{1,m}; k) \leq 3km$ .

Естественно поинтересоваться скоростью роста  $R(G)$  как функции от числа вершин  $G$ . Здесь имеются достаточно точные результаты.

**Теорема 6.14 [BuE].** Если  $G$  — связный граф с  $t$  вершинами, то  $R(G) \geq [(4t-1)/3]$ . При этом для каждого  $t \geq 3$  существует граф  $G$ , реализующий указанную оценку.

Эта граница достигается на графах, состоящих из звезды порядка  $2t/3$ , связанной с путем длины 3.

Если допустить несвязность графа  $G$  (пусть даже без изолированных вершин), то  $R(G)$  может быть еще меньше, как это показывает

**Теорема 6.15 [BuE].** Если  $G$  имеет  $t$  вершин, то  $R(G) \geq t + (\log t / \log 2) - \alpha \log \log t$ , где  $\alpha > 0$  — некоторая константа. Кроме того, существует граф  $G$  и константа  $\beta$ , такие, что  $R(G) \leq t + \beta \sqrt{t}$ .

Имеется предположение, что нижняя оценка точна.

Мы завершаем эту главу рядом результатов, гипотез и замечаний, которые указывают на различные направления исследований в этой области. Большинство из них относится к случаю 2-раскраски; к аналогичным утверждениям для  $k$ -раскраски читатель может обратиться сам.

Множество графов  $\mathcal{G} = \{G_1, G_2, \dots\}$  будем называть  $L$ -множеством, если существует константа  $\alpha = \alpha(\mathcal{G})$ , такая, что  $R(G_i) \leq \alpha v(G_i)$  для всех  $i$  ( $v(G_i)$  обозначает число вершин графа  $G_i$ ). Определим (локальную) реберную плотность  $\rho(G)$  графа  $G$  как  $\rho(G) = \max_{H \subseteq G} (e(H)/v(H))$ , где  $e(H)$  обозначает число

ребер в  $H$ . Эрде́шу принадлежит следующая сильная

**Гипотеза.** Если реберная плотность  $\rho(G)$  ограничена для всех  $G \in \mathcal{G}$ , то  $\mathcal{G}$  является  $L$ -множеством.

И хотя вся гипотеза в целом далека от разрешения, тем не менее имеется ряд подтверждающих ее результатов. Так, например, множество деревьев образует  $L$ -множество, и для любого  $t$  множество  $\{C_t^m\}$  из  $t$ -х степеней циклов также образует  $L$ -множество. Относительно одного достаточно интересного множества графов (хотя и не обладающих ограниченной реберной плотностью) неизвестно, является ли оно  $L$ -множеством; это множество кубов  $\{Q_i\}$  (т. е.  $Q_i$  — это 1-скелет  $i$ -мерного куба).

Следующий весьма общий результат полезен, в частности, для относительно плотных графов.

**Теорема 6.16 (Хватал, Харари [ChvH1]).** Пусть  $G$  — граф с  $p$  вершинами и  $q$  ребрами, и пусть  $s$  — порядок группы автоморфизмов графа  $G$ . Тогда

$$R(G; k) \geq (sk^{q-1})^{1/p}. \quad (6.17)$$

**Доказательство.** Доказательство проведем простым использованием «вероятностного метода» [ES].

Пусть вершины графа  $G$  произвольным образом помечены буквами  $v_1, \dots, v_p$ , порождая тем самым «помеченный» граф  $\bar{G}$ . Легко видеть, что полный граф  $K_n$  содержит в точности  $(n)_p = n(n-1) \dots (n-p+1)$  различных копий  $\bar{G}$ . Из определения  $s$  как числа симметрий  $G$  заключаем, что  $K_n$  содержит  $t \equiv (n)_p/s$  копий  $G$ , скажем  $G_1, G_2, \dots, G_t$ . Будем говорить, что  $k$ -раскрашивание  $K_n$  является  $G_i$ -плохим, если все ребра подграфа  $G_i$  из  $K_n$  одинаково окрашены. Поскольку имеется  $k \binom{n}{2}$   $k$ -раскрашиваний, то  $G_i$ -«плохих» раскрашиваний существует в точности  $k \binom{n}{2}^{-q+1}$ . Следовательно, имеется не более  $tk \binom{n}{2}^{-q+1}$  раскрашиваний, которые  $G_i$ -«плохи» для некоторого  $i$ . Поэтому, если  $tk \binom{n}{2}^{-q+1} < k \binom{n}{2}$ , то некоторое  $k$ -раскрашивание не дает одноцветной копии  $G$  в  $K_n$ . Это условие, очевидно, выполнено, если  $k^{q-1} > (n^p/s) \geq ((n)_p/s) = t$ , т. е.  $n < (sk^{q-1})^{1/p}$ . Таким образом,  $R(G; k) \geq (sk^{q-1})^{1/p}$ , и тем самым теорема доказана.  $\square$

Недавно возникла еще одна модификация чисел Рамсея, нашедшая отражение в литературе. Пусть  $R_e(G)$  обозначает для данного графа  $G$  наименьшее число ребер, при котором существует граф  $H$  с таким числом ребер, любая 2-раскраска ребер которого всегда содержит одноцветную копию графа  $G$ . Очевидно, что

$$R_e(G) \leq \binom{R(G)}{2}. \quad (6.18)$$

Если  $G$  — полный граф, то (6.18) обращается в равенство [EFRS]. Равенство в (6.18) может также иметь место и для неполных графов, например для  $C_4$  [Bu2]. С другой стороны, трудно показать [EFRS], что

$$R_e(K_{1,m}) = \begin{cases} 2m-1 & \text{для четного } m, \\ 2m & \text{для нечетного } m. \end{cases}$$

Таким образом, при  $m \rightarrow \infty$

$$R_e(K_{1,m}) / \binom{R(K_{1,m})}{2} \rightarrow 0. \quad (6.19)$$

Имеется один любопытный вопрос, связанный с вычислением  $R_e$ : будет ли справедлива формула (6.19), если  $K_{1,m}$  заменить на путь  $P_m$ ? Пока в качестве возможных вариантов мы даже не можем отвергнуть ни  $R_e(P_m) < cm$ , ни  $R_e(P_m) > cm^2$ .

Наконец, можно рассмотреть класс  $\mathcal{E}(G)$  графов  $H$ , таких, что  $H \rightarrow (G, G)^1$ , но  $H' \not\rightarrow (G, G)$  для любого собственного подграфа  $H' \subset H$ . В работе [BuFS] такие графы названы рамсеевски минимальными для графа  $G$ . Бурр [Bu2] высказал предположение о том, что класс  $\mathcal{E}(G)$  всегда бесконечен, за исключением того случая, когда  $G$  имеет форму  $S \cup M$ , где  $S$  — нечетная звезда, а  $M$  — паросочетание. Однако недавно было показано, что эта гипотеза неверна. Известно [Bu2; NR0], что класс  $\mathcal{E}(G)$  бесконечен в любом из следующих случаев:

- (a)  $G$  трехсвязен;
- (b)  $G$  имеет хроматическое число по крайней мере 3;
- (c)  $G$  — лес, который не является объединением звезд.

Особенно поучительно доказательство п. (c), поскольку в нем представлен ряд идей, постоянно встречающихся в рамсеевской теории графов.

**Теорема 6.17** (Нешетриль, Редль [NR0]). *Пусть  $G$  — лес, не являющийся объединением звезд. Тогда класс  $\mathcal{E}(G)$  — бесконечен.*

*Доказательство.* Покажем, что для каждого данного целого  $t$  найдется граф  $H \in \mathcal{E}(G)$ , имеющий более  $t$  вершин. Пусть  $n$  — число вершин графа  $G$ .

Начнем с упоминания классического результата Эрдёша [EH], согласно которому существует граф  $K$  с хроматическим числом  $\chi(K)$ , превосходящим  $n^2$ , и обхватом, превосходящим  $t$ . При любом 2-раскрашивании ребер графа  $K$  ребра хотя бы одного из цветов образуют граф  $K'$  с  $\chi(K') > n$  (вообще, если  $E(K) = E(K_1) \cup E(K_2)$ , то  $\chi(K) \leq \chi(K_1)\chi(K_2)$ , поскольку произведение двух вершинных раскрасок в соответственно  $\chi(K_1)$  и  $\chi(K_2)$  цветов дает правильную  $\chi(K_1)\chi(K_2)$ -раскраску вершин  $K$ ). Последовательным удалением ребер из  $K'$  можно образовать наименьший подграф  $K'' \subseteq K'$  с тем свойством, что  $\chi(K'') = n + 1$ . В частности, все вершины подграфа  $K''$  должны иметь степень по крайней мере  $n$ . Действительно, если  $v$  — вершина  $K''$  степени, меньшей  $n$ , то в силу минимальности граф  $K'' - \{v\}$  может быть  $n$ -раскрашен, а так как вершина  $v$  смежна не более  $n - 1$  вершинам графа  $K'' - \{v\}$ , то это  $n$ -раскрашивание можно продолжить до правильной  $n$ -раскраски вершин всего  $K''$  (что неосуществимо). Помимо того, легко видеть, что  $K''$  содержит в качестве подграфа каждый лес  $F$  с  $n$  вершинами (можно начать вкладывать  $F$  в любом месте  $K''$ ; поскольку все вершины в  $K''$  по крайней мере степени  $n$ , мы никогда не попадем в тупик).

<sup>1)</sup> Напоминаем, что запись  $H \rightarrow (G, G)$  означает, что любое 2-раскрашивание ребер  $H$  содержит одноцветный подграф, изоморфный  $G$ .

Таким образом, показано, что  $K \rightarrow G$ . Стало быть,  $K$  содержит (минимальный) подграф  $K^* \in \mathcal{C}(G)$ . Заметим, что сам  $K^*$  может и не быть лесом, поскольку ребра каждого леса всегда можно 2-раскрасить так, чтобы не получилось одноцветного пути  $P_3$  из трех ребер (а по предположению, так как  $G$  не является объединением звезд, он содержит  $P_3$  как подграф). Таким образом, обхват подграфа  $K^*$  конечен; разумеется, он больше  $t$  — обхвата графа  $K$ . Но это влечет за собой, что  $K^*$  имеет больше  $t$  вершин, и тем самым доказательство завершено.  $\square$

Выдвигается весьма тонкая гипотеза относительно  $\mathcal{C}(G)$ : если класс  $\mathcal{C}(G)$  конечен и граф  $G'$  получается из  $G$  добавлением непересекающихся ребер, то класс  $\mathcal{C}(G')$  конечен.

В заключение этой главы сформулируем одну очень сильную гипотезу Эрдёша.

**Гипотеза.**  $\chi(G_m) = m \Rightarrow R(G_m) \geq R(K_m)$ .

**Упражнение 6.3.** Выберите (случайным образом) граф  $G$  с пятью ребрами и определите  $R(G)$ .

*Замечания.* Здесь было бы уместно указать новые направления рамсеевской теории графов. Опишем в общих чертах лишь два наиболее существенных.

**1. Гальвин-рамсеевские теоремы.** Поскольку любое 2-раскрашивание ребер графа  $K_6$  дает  $K_3$  — топоч (или проще:  $K_6 \rightarrow (K_3, K_3)$ ), то для любого  $G$ , содержащего в себе в качестве подграфа  $K_6$ , очевидно, что  $G \rightarrow (K_3, K_3)$ . В 1967 г. Эрдёш и Хайнал задались вопросом: существует ли граф  $G$ , не содержащий  $K_6$ , но для которого также  $G \rightarrow (K_3, K_3)$ ? Такие графы были последовательно обнаружены рядом авторов, включая Поша, ван Линта и автора.

**Упражнение 6.4.** Пусть  $K_8 - C_5$  есть граф  $K_8$  без 5-цикла  $C_5$  (значит, этот граф имеет 23 ребра). Покажите, что (а)  $K_6 \not\subseteq K_8 - C_5$ , (б)  $K_8 - C_5 \rightarrow (K_3, K_3)$ , (с) ни для какого собственного подграфа графа  $K_8 - C_5$  п. (б) не выполняется.

Граф в конструкции, предложенной Поша, не обладал  $K_5$  в качестве подграфа. Однако наибольшего успеха здесь достиг Фолкман [F2], предложивший весьма примечательный граф  $G$ , для которого (1)  $G \rightarrow (K_3, K_3)$ , (2)  $K_4 \not\subseteq G$ .

К сожалению, число вершин  $v(G)$  в графе Фолкмана очень велико. Побуждаемый естественным стремлением понизить эту границу, автор предлагает следующую гипотезу.

**Гипотеза.** *Эрдёш платит  $[1000/v^{18}]$  долларов за граф  $G$ , удовлетворяющий п. (1) и (2) и имеющий  $v$  вершин<sup>1)</sup>.*

Гальвин сформулировал более общий вопрос. Предположим, что  $G$  — это  $X$ -свободный граф, т. е.  $G$  не содержит подграфа, изоморфного графу  $X$ . Существует ли  $X$ -свободный граф  $H$ , такой, что  $H \rightarrow (G, G)$ ?

Результат Фолкмана представляет собой случай  $G = K_3$ ,  $X = K_4$ .

Пока имеющиеся на этот вопрос ответы далеки от полных, хотя весьма впечатляющие результаты были получены Дьюбером, Нешетрилем и Редлем [D2; NR2, 3]; они показали, например, что ответ утвердителен, когда  $X$  — любой полный граф, а  $G$  — любой  $X$ -свободный граф. С другой стороны, для  $X = \{C_4 \text{ с диагональю}\}$  ответ отрицателен. Вопрос в случае  $X = C_4$  пока открыт.

**II. Индуцированные рамсеевские теоремы для графов.** Много более сильное условие состоит в требовании наличия такой одноцветной копии графа  $G$  при любом 2-раскрашивании графа  $H$ , чтобы она оказывалась индуцированным<sup>2)</sup> подграфом графа  $H$ . Ряд результатов такого типа уже имеется, сильнеешие содержатся в работе [NR3]. Основной здесь является следующая

**Теорема.** *Для любых  $G$  и  $r \in \omega$  существует граф  $H$ , такой, что если его ребра  $r$ -раскрашены, то в  $H$  найдется индуцированный одноцветный подграф  $G$ .*

Некоторые из таких результатов будут также отмечены в последней главе.

## Глава 7

# ЕВКЛИДОВА ТЕОРИЯ РАМСЕЯ

В настоящей главе описывается класс результатов рамсеевского типа, некоторым образом зависящих от структуры  $n$ -мерного евклидова пространства  $\mathbb{E}^n$ . Для этого класса типичен следующий вопрос. Пусть задана группа  $G$  преобразований  $\mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{E}^n$ ; для каких множеств  $C \subseteq \mathbb{E}^n$  и чисел  $r \in \omega$  выполняется утверждение:

при любом  $r$ -раскрашивании  $\mathbb{E}^n$  найдется  $g \in G$ , такой, что  $g(C)$  одноцветно?

<sup>1)</sup> Известно, что гипотеза верна по крайней мере для одного значения  $v$ .

<sup>2)</sup> То есть если  $v, v'$  — вершины графов  $G$  и  $H$  и  $\{v, v'\}$  — ребро  $H$ , то оно также и ребро  $G$ .



Нам уже приходилось иметь дело с подобными утверждениями, например с теоремой ван дер Вардена<sup>1)</sup> ( $n = 1$ ,  $G = \{x \rightarrow ax + b \mid \forall a \neq 0\}$ ,  $C$  — конечное подмножество) и ее  $n$ -мерными обобщениями. В этой главе ограничимся рассмотрением группы  $G$  движений пространства  $\mathbb{E}^n$ , т. е. комбинаций параллельных переносов и поворотов.

**Определение.** Будем говорить, что имеет место  $R(C, n, r)$ , если при любом  $r$ -раскрашивании  $\mathbb{E}^n$  всегда имеется одноцветная копия  $C$ , т. е. (одноцветный) образ  $C$  при некотором движении.

**Упражнение 7.1.** Пусть  $C$  — три вершины равностороннего треугольника единичной площади.

а) Покажите, что  $R(C, 4, 2)$  выполняется. (Указание: рассмотрите единичный симплекс в  $\mathbb{E}^4$ .)

(б) Покажите, что  $R(C, 2r, r)$  выполняется.

(с) Покажите, что  $R(C, 2, 2)$  не выполняется.

(д) А как обстоит дело с  $R(C, 3, 2)$ ?

**Упражнение 7.2.** Пусть  $C'$  состоит из двух точек, отстоящих друг от друга на расстояние 1.

(а) Покажите, что  $R(C', 2, 3)$  выполняется.

(б) Покажите, что  $R(C', 2, 7)$  не выполняется.

(с) Выполняется ли  $R(C', 2, 4)$ ?

В качестве чуть менее тривиального примера рассмотрим  $Q$  — четыре вершины единичного квадрата.

**Утверждение.**  $R(Q, 6, 2)$  выполняется.

**Доказательство.** Рассмотрим множество  $S \subseteq \mathbb{E}^6$ :  $S = \{(x_1, \dots, x_6) : x_i = 1/\sqrt{2} \text{ для двух } i, x_i = 0 \text{ для остальных } i\}$ . Каждое 2-раскрашивание  $\chi$  пространства  $\mathbb{E}^6$  порождает и 2-раскрашивание  $S$ . С каждой точкой  $s \in S$  можно связать ребро  $e(s)$  полного графа на множестве  $[6]$ , именно если  $x_i = x_j > 0$  для  $s$ , то  $e(s) = \{i, j\}$ . Таким образом,  $\chi$  индуцирует 2-раскрашивание ребер графа  $K_6$ . Однако легко показать, что в любом 2-раскрашивании ребер  $K_6$  образуется некоторый одноцветный 4-цикл  $C_4$ , скажем  $(i_1, i_2, i_3, i_4)$ . По построению графа  $K_6$  четыре точки

$$s_{ij} = (0, \dots, \overset{i}{1/\sqrt{2}}, \dots, 0, \dots, \overset{j}{1/\sqrt{2}}, \dots, 0),$$

$$(i, j) = (i_1, i_2), (i_2, i_3), (i_3, i_4), (i_4, i_1),$$

имеют одинаковый цвет. Но расстояние между последовательными точками  $s_{ij}$  равно 1, в то время как расстояние между непоследовательными  $s_{ij}$  равно  $\sqrt{2}$ . Это означает, что  $s_{ij}$  образуют одноцветную копию графа  $Q$ .  $\square$

<sup>1)</sup> Строго говоря, это относится к  $\mathbb{Z}$  но расширение до  $\mathbb{E}$  несложно.

Ряд результатов в этом направлении был опубликован совсем недавно (например, [EGMRSS1, 2, 3]). Вот один из них: известно, что  $R(C, 2, 2)$  выполняется, когда  $C$  — множество вершин любого прямоугольного треугольника.

Однако следующая гипотеза остается неразрешенной.

**Гипотеза.** При всяком 2-раскрашивании пространства  $\mathbb{E}^2$  каждое трехточечное множество наличествует монохроматически, за исключением, быть может, вершин лишь одного равностороннего треугольника.

**Задача.** Покажите, что  $R(C, 2, 3)$  никогда не выполняется, если  $|C| = 3$ .

**Упражнение 7.3.** Покажите, что если  $\mathbb{E}^2$  покрыть двумя замкнутыми множествами цветов, то любое трехточечное множество наличествует монохроматически.

Теперь дадим определение, ключевое для этой главы.

**Определение.** Конфигурация  $C$  называется рамсеевской<sup>1)</sup>, если для каждого  $r$  существует  $n$ , такое, что  $R(C, n, r)$  выполняется.

Другими словами, конфигурация  $C$  является рамсеевской, если наличие ее одноцветной копии в  $r$ -раскрашенном  $\mathbb{E}^n$  зависит только от величины  $n$ .

**Упражнение 7.4.** Покажите, что если конфигурация  $C$  рамсеевская, то  $C$  должно быть конечно.

**Пример.** Множество  $C$  из вершин равностороннего треугольника является рамсеевским, поскольку, как отмечалось (упр. 7.1),  $R(C, 2r, r)$  выполняется.

Должно отметить, что если множество  $C$  рамсеевское, то по теореме компактности существует конечное множество  $X$ , которое всегда содержит одноцветную копию  $C$ , каково бы ни было его  $r$ -раскрашивание.

Рамсеевость всех известных донныне рамсеевских конфигураций основывается на следующем результате.

**Теорема 7.1.** Если множества  $C_1$  и  $C_2$  рамсеевские, то и  $C_1 \times C_2$  рамсеевское<sup>2)</sup>.

**Доказательство.** Зафиксируем  $C_1 \subseteq \mathbb{E}^m$ ,  $C_2 \subseteq \mathbb{E}^n$ , и пусть  $r \in \omega$ . Выберем  $u$  таким, что  $R(C_1, u, r)$  выполняется. Согласно

<sup>1)</sup> А как же иначе?

<sup>2)</sup>  $C_1 \times C_2$  обозначает обычное декартово произведение.

теореме компактности, найдется конечное множество  $T \subseteq \mathbb{E}^u$ , такое, что любое  $r$ -раскрашивание  $T$  влечет за собой одноцветность  $C_1 \subseteq T$ . Пусть  $t = |T|$  и  $T = \{x_1, \dots, x_t\}$ . Выберем  $v$  так, чтобы  $R(C_2, v, r^t)$  выполнялось.

**Утверждение.**  $R(C_1 \times C_2, u + v, r)$  выполняется.

*Доказательство утверждения.* Пусть раскраска  $\chi: \mathbb{E}^{u+v} \rightarrow [r]$  задана. Определим индуцированное раскрашивание  $\chi': \mathbb{E}^v \rightarrow [r^t]$  по правилу  $\chi'(y) = (\chi(x_1 \times y), \chi(x_2 \times y), \dots, \chi(x_t \times y))$ . Согласно выбору  $v$ , в  $\mathbb{E}^v$  найдется копия  $C_2$  — топо $\chi'$ , скажем  $\bar{C}_2$ .

Определим, наконец, индуцированное  $r$ -раскрашивание  $\chi''$  множества  $T$ , полагая  $\chi''(x_i) = \chi(x_i \times y)$  для некоторого  $y \in \bar{C}_2$ . (Это определение корректно, поскольку  $\bar{C}_2$  — топо $\chi'$ .) Теперь остается проверить, что  $T$  (вследствие выбора  $u$ ) содержит одноцветную копию  $C_1 \times C_2$ .  $\square$

Поскольку любое двухточечное множество рамсеевское, то и любое (декартово) произведение таких множеств также будет рамсеевским. Они суть в точности множества вершин прямоугольных параллелепипедов; их мы также будем называть кирпичами. Все известные в настоящее время рамсеевские множества являются подмножествами кирпичей. В этой связи возникает интересный вопрос: какие симплексы<sup>1)</sup>  $S$  являются подмножествами кирпичей?

Конечно, необходимо, чтобы для любых трех вершин  $S$  треугольник, ими образуемый, не был тупоугольным. Для  $n = 2, 3$  это условие оказывается и достаточным. Общего хорошего описания таких «прямоугольных» симплексов пока нет. Неожиданности начинаются с размерности 4: в  $\mathbb{E}^4$  существует симплекс со всеми реберными углами, меньшими чем  $89^\circ$ , не являющийся подмножеством никакого кирпича. Кстати, он примечателен еще и тем, что является для нас первым примером нерамсеевского конечного множества. Но этой уникальности его лишает следующий результат.

Будем называть множество сферическим, если оно лежит на сфере в некотором  $\mathbb{E}^n$ .

**Теорема 7.2 [EGMRSS1].** Если множество  $S$  рамсеевское, то оно сферическое.

Для доказательства теоремы потребуется несколько предварительных лемм.

**Лемма 1.** Существует  $2n$ -раскрашивание  $\chi$  прямой  $\mathbb{R}$ , такое, что уравнение  $\sum_{i=1}^n (y_i - y'_i) = 1$  не имеет решений с  $\chi(y_i) = \chi(y'_i)$ ,  $1 \leq i \leq n$ .

<sup>1)</sup> То есть вершины симплекса.

*Доказательство.* Определим  $\chi$ , полагая  $\chi(y) = j$  при условии  $y \in [2m + j/n, 2m + (j+1)/n)$ ,  $m \in \mathbb{Z}$ . Тогда равенство  $\chi(y_i) = \chi(y'_i)$  влечет за собой  $y_i - y'_i = 2m_i + \theta_i$  для некоторого  $\theta_i$ :  $|\theta_i| < 1/n$ . Тогда

$$1 = \sum_{i=1}^n (y_i - y'_i) = 2 \sum_{i=1}^n m_i + \sum_{i=1}^n \theta_i = 2M + \theta,$$

где  $\theta = \sum_{i=1}^n \theta_i$ . Но это равенство не может иметь места, так как  $0 \leq |\theta| < 1$ .  $\square$

**Лемма 2.** Пусть  $c_1, \dots, c_n, b \neq 0$  суть действительные числа. Тогда существует  $(2n)^n$ -раскрашивание  $\chi^*$  прямой  $\mathbb{R}$ , такое, что уравнение

$$\sum_{i=1}^n c_i (x_i - x'_i) = b \quad (7.1)$$

не имеет решений с  $\chi^*(x_i) = \chi^*(x'_i)$ ,  $1 \leq i \leq n$ .

*Доказательство.* Заметим, что (7.1) выполняется тогда и только тогда, когда

$$\sum_{i=1}^n c_i^* (x_i - x'_i) = 1, \quad (7.1')$$

где  $c_i^* = c_i b^{-1}$ . Определим  $\chi^*$  на  $\mathbb{R}$  по правилу

$$\chi^*(a) = \chi^*(\beta) \Leftrightarrow \chi(c_i^* a) = \chi(c_i^* \beta) \quad \forall i \in [n],$$

где  $\chi$  — это  $2n$ -раскрашивание, определенное в лемме 1. Таким образом,  $\chi^*$  — это некоторое  $(2n)^n$ -раскрашивание. Предположим теперь, что равенство (7.1') выполняется при  $\chi^*(x_i) = \chi^*(x'_i)$ ,  $1 \leq i \leq n$ . Но тогда  $\chi(c_j^* x_i) = \chi(c_j^* x'_i)$ ,  $1 \leq i, j \leq n$ , и, в частности,  $\chi(c_i^* x_i) = \chi(c_i^* x'_i)$ ,  $1 \leq i \leq n$ . Стало быть,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n c_i^* (x_i - x'_i) &= \sum_{i=1}^n (c_i^* x_i - c_i^* x'_i) = \\ &= \sum_{i=1}^n (2m_i + \theta_i - 2m'_i - \theta'_i) = 2M + \sum_{i=1}^n (\theta_i - \theta'_i) \neq 1, \end{aligned}$$

поскольку  $0 \leq \sum_{i=1}^n |\theta_i - \theta'_i| < 1$ .  $\square$

Далее понадобится геометрическая

**Лемма 3.** Множество  $K = \{\bar{v}_0, \dots, \bar{v}_k\}$  не является сферическим тогда и только тогда, когда существуют  $c_i$ , не все равные 0, такие, что

$$(1) \sum_{i=1}^k c_i (\bar{v}_i - \bar{v}_0) = 0,$$

$$(2) \sum_{i=1}^k c_i (\bar{v}_i^2 - \bar{v}_0^2) = b \neq 0,$$

где для  $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n)$  запись  $\bar{x}^2$  обозначает  $\bar{x} \cdot \bar{x} = x_1^2 + \dots + x_n^2$ .

*Доказательство.* Пусть  $K$  — сферическое множество, лежащее на сфере радиуса  $r$  с центром в  $\bar{w}$ , и пусть  $K$  удовлетворяет п. (1). По теореме косинусов имеем  $r^2 = (\bar{v}_i - \bar{w})^2 = (\bar{v}_0 - \bar{w})^2 + (\bar{v}_i - \bar{v}_0)^2 - 2(\bar{v}_i - \bar{v}_0)(\bar{w} - \bar{v}_0)$ , т. е.  $(\bar{v}_i - \bar{v}_0)^2 = 2(\bar{v}_i - \bar{v}_0)(\bar{w} - \bar{v}_0)$ , поскольку  $(\bar{v}_0 - \bar{w})^2 = r^2$ . Поэтому

$$\sum_{i=1}^k c_i (\bar{v}_i - \bar{v}_0)^2 = 2(\bar{w} - \bar{v}_0) \sum_{i=1}^k c_i (\bar{v}_i - \bar{v}_0) = 0,$$

что противоречит п. (2).

С другой стороны, пусть  $K$  не является сферическим. Без потери общности предположим, что  $K$  — минимальное несферическое множество, т. е. любое собственное подмножество множества  $K$  является сферическим множеством. Точки  $\bar{v}_i$ ,  $0 \leq i \leq k$ , не могут образовывать симплекс, поскольку симплекс есть сферическое множество. Поэтому векторы  $\bar{v}_i - \bar{v}_0$  должны быть линейно зависимыми, т. е. должны существовать числа  $c_i$ ,  $1 \leq i \leq k$ , не все равные нулю, такие, что

$$\sum_{i=1}^k c_i (\bar{v}_i - \bar{v}_0) = 0, \quad (7.2)$$

например  $c_k \neq 0$ . По предположению минимальности множества  $K$  векторы  $\bar{v}_0, \dots, \bar{v}_{k-1}$  лежат на некоторой сфере радиуса  $r$  с центром в  $\bar{w}$ .

Так как  $\bar{v}_i^2 - \bar{v}_0^2 = (\bar{v}_i - \bar{w})^2 - (\bar{v}_0 - \bar{w})^2 + 2(\bar{v}_i - \bar{v}_0)\bar{w}$ , то

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k c_i (\bar{v}_i^2 - \bar{v}_0^2) &= \sum_{i=1}^k c_i ((\bar{v}_i - \bar{w})^2 - (\bar{v}_0 - \bar{w})^2) + \\ &+ 2 \sum_{i=1}^k c_i (\bar{v}_i - \bar{v}_0) \bar{w} = c_k ((\bar{v}_k - \bar{w})^2 - r^2) \neq 0, \end{aligned}$$

поскольку имеет место равенство (7.2) и вектор  $\bar{v}_k$  не лежит на сфере радиуса  $r$  с центром в  $\bar{w}$ . Следовательно, п. (2) выполняется, и тем самым лемма доказана.  $\square$

Изложим теперь

*Доказательство теоремы 7.2.* Предположим, что  $S = \{\bar{v}_0, \dots, \bar{v}_n\}$  не является сферическим множеством. В силу леммы 3

существуют  $c_i$  и  $b \neq 0$ , такие, что

$$\sum_{i=1}^n c_i (\bar{v}_i - \bar{v}_0) = 0, \quad \sum_{i=1}^n c_i (\bar{v}_i^2 - \bar{v}_0^2) = b \neq 0, \quad (7.3)$$

Окрасим каждую точку  $\bar{u} \in \mathbb{E}^n$  в цвет  $\chi$  по правилу  $\chi(\bar{u}) = \chi^*(\bar{u} \times \bar{u})$ , где  $\chi^*$  есть  $(2n)^n$ -раскрашивание из формулировки леммы 2. Таким образом, если  $\chi$  окрашивает в один и тот же цвет все  $\bar{v}_i$ , то  $\chi^*$  окрашивает в один и тот же цвет  $\bar{v}_i^2$ , что невозможно, поскольку, согласно лемме 2, уравнения (7.3) не могут иметь одноцветных решений. Следовательно, при этом  $(2n)^n$ -раскрашивании  $\chi$  пространства  $\mathbb{E}^n$  множество  $S$  не может наличествовать монохроматически. Значит, в силу произвольности  $N$  множество  $S$  нерамсеевское.  $\square$

Простейший пример нерамсеевской конфигурации представляет собой множество  $L$ , состоящее из трех коллинеарных точек. Согласно доказанной теореме, пространство  $\mathbb{E}^n$  может быть 16-раскрашено без наличия одноцветного  $L$ . Неизвестно, можно ли здесь константу 16 уменьшить.

Схематически ситуация такова:

Кирпичи  $\subseteq$  Рамсеевость  $\subseteq$  Сферичность.

Сегодняшнее «экспертное» мнение тяготеет к тому, что левая часть истинна, хотя для этого нет никаких реальных оснований. Простой путь поколебать это мнение мог бы состоять, например, в демонстрации того, что множество вершин некоторого тупоугольного треугольника рамсеевское. Было бы очень интересно увидеть, как эта ситуация в конце концов разрешится.

**Упражнение 7.5.** (Очень кстати!) Покажите, что для любых четырех точек в  $\mathbb{E}^2$  некоторое расстояние между двумя из этих точек не является нечетным целым.

Рассмотрим теперь следующий вопрос. Какие рамсеевские теоремы могут выполняться, когда фиксированное евклидово пространство разбивается на произвольное (конечное) число (цветовых) классов, а группой преобразований является группа движения  $\mathbb{E}^n$ ? Как уже отмечалось в упр. 7.2, даже семи цветов достаточно, чтобы избежать появления одноцветной пары точек с предписанным расстоянием (в  $\mathbb{E}^2$ ). А положительный результат в этом направлении, гипотетически высказанный Р. Гуревичем, состоит в следующем:

При любом конечном раскрашивании  $\mathbb{E}^2$  всегда найдутся три точки, имеющие одинаковый цвет и образующие треугольник площади 1.

Обычно мы будем говорить проще: найдется одноцветный треугольник площади 1. Для доказательства некоторой усиленной формы этой гипотезы нам понадобится

**Теорема 7.3.** Для каждого  $r \in \omega$  существует (наименьшее) положительное целое  $T(r)$ , такое, что при любом  $r$ -раскрашивании  $\mathbb{Z}^2$  всегда найдется одноцветный прямоугольный треугольник с площадью, в точности равной  $T(r)$ .

**Доказательство.** Для фиксированного  $r \in \omega$  предположим, что решетка точек  $\mathbb{Z}^2$ , будучи  $r$ -раскрашенной, не обладает одноцветным прямоугольным треугольником площади  $T = T(r)$ , где  $T(r)$  определяется по такому правилу:

Пусть  $S_1 = 1$ ,  $S_{i+1} = (S_i + 1)!W(2(S_i + 1)! + 1, i + 1)$ ,  $i \leq i < r$ , и  $W(k, r)$  — функция ван дер Вардена<sup>1)</sup> (из гл. 3). Положим  $T = T(r) = S_1 S_2 \dots S_r$ .

**Шаг 0.** Пусть  $X_r$  обозначает целое  $S_{r-1} S_{r-2} \dots S_2 S_1$ . Рассмотрим последовательность из  $W_r = W(2(S_{r-1} + 1)! + 1, r)$  целых точек  $(iX_r, 0)$ ,  $1 \leq i \leq W_r$ , на оси  $x$ . Так как по предположению эти точки  $r$ -раскрашены, то по определению  $W$  они содержат одноцветную арифметическую прогрессию из  $2(S_{r-1} + 1)! + 1$  членов, скажем  $(a_r + ig_r X_r, 0)$ ,  $0 \leq i \leq 2(S_{r-1} + 1)!$ , где  $g_r$  — величина шага этой прогрессии. Конечно,  $g_r \leq W_r$ . Без ограничения общности можно предполагать, что точки этой прогрессии имеют цвет  $r$ . Так как мы предположили отсутствие одноцветных прямоугольных треугольников площади  $T$ , то определенные точки  $\mathbb{Z}^2$  не могут иметь цвет  $r$ . В частности, точки вида

$$p_{ij} = \left( a_r + ig_r X_r, \frac{2Tj}{g_r X_r (S_{r-1} + 1)!} \right), \quad 0 \leq i \leq (S_{r-1} + 1), \\ 1 \leq j \leq S_{r-1} + 1,$$

не могут иметь цвет  $r$ . Если бы это было не так, то, привлекая еще две точки цвета  $r$ , именно  $p_i = (a_r + ig_r X_r, 0)$  и  $p_j = (a_r + ig_r X_r + g_r X_r (S_{r-1} + 1)!/j, 0)$ , получили бы прямоугольный треугольник цвета  $r$  и площади  $T$  (рис. 7.1).

Заметим, что пространство между соседними строками в этой таблице имеет величину

$$2T/[g_r X_r (S_{r-1} + 1)!] = 2W_r!/g_r. \quad (7.4)$$

**Шаг 1.** Прежде всего слегка преобразуем систему координат, приняв нижнюю строку таблицы  $(p_{ij})$  за новую ось  $x$ , а самый левый ее столбец — за ось  $y$ . В этой системе координаты

<sup>1)</sup> То есть  $r$ -раскрашивание  $[W(k, r)]$  всегда содержит одноцветную  $k$ -членную А. П.

наших точек (с учетом (7.4)) принимают вид  $(ig_r X_r, (2W_r!/g_r)j)$ ,  $0 \leq i \leq (S_{r-1}+1)!$ ,  $0 \leq j \leq S_{r-1}$ . Пусть  $X_{r-1} = (S_{r-1}+1)!g_r S_{r-2} \dots S_2 S_1$ . Сосредоточим внимание на точках базовой строки вида  $(iX_{r-1}, 0)$ . Так как  $X_{r-1}/g_r X_r = (S_{r-1}+1)!/S_{r-1}$ , то все эти точки находятся в нашей свободной от цвета  $r$  подтаблице  $0 \leq i \leq S_{r-1}$ . Но, согласно определению,  $S_{r-1} \geq W(2(S_{r-2}+1)!+1, r-1) \equiv W_{r-1}$ , значит, среди этих точек должна найтись некоторая одноцветная арифметическая

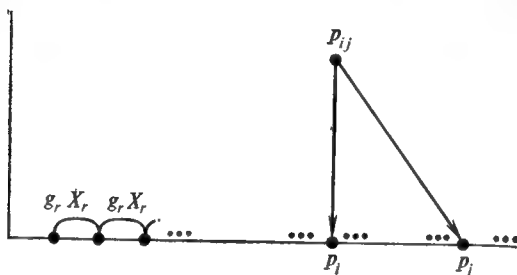


Рис. 7.1.

прогрессия с  $2(S_{r-2}+1)!+1$  членами, скажем  $((a_{r-1}+ig_{r-1})X_{r-1}, 0)$ ,  $0 \leq i \leq 2(S_{r-2}+1)!$ , где  $g_{r-1} \leq W_{r-1}$ ; без ограничения общности можем предполагать, что эта прогрессия имеет цвет  $r-1$ . Как и ранее эта арифметическая прогрессия предохраняет от наличия определенных точек цвета  $r-1$  в нашей таблице; в частности, так же как и ранее, точки вида

$$p'_{ij} = \left( (a_{r-1} + ig_{r-1}) X_{r-1}, \frac{2Tj}{g_{r-1} X_{r-1} (S_{r-2} + 1)!} \right), \\ 0 \leq i \leq (S_{r-2} + 1)!, \quad 1 \leq j \leq S_{r-2} + 1,$$

не могут иметь цвет  $r-1$ . Заметим, что так как строчное пространство в этой подтаблице равно

$$2T/g_{r-1} X_{r-1} (S_{r-2} + 1)! = 2W_r! W_{r-1}! / g_r g_{r-1},$$

то эти точки  $p'_{ij}$  оказываются подмножествами множества точек  $p_{ij}$ , и, значит, они также не могут иметь и цвет  $r$ .

...

*Шаг k.* Предположим, что теперь имеется изолированная подтаблица из точек

$$q_{ij} = \left( ig_{r-k+1} X_{r-k+1}, \frac{2W_r! W_{r-1}! \dots W_{r-k+1}!}{g_r g_{r-1} \dots g_{r-k+1}} j \right). \quad (7.5)$$

$$0 \leq i \leq (S_{r-k} + 1)!, \quad 0 \leq j \leq S_{r-k}.$$



не содержащая цветов  $r, r-1, \dots, r-k+1$ , где

$$X_{r-k+1} = (S_{r-1} + 1)! \dots (S_{r-k+1} + 1)! g_r g_{r-1} \dots g_{r-k+2} S_{r-k} \dots S_2 S_1, \\ g_t \leq W_t = W(2(S_{t-1} + 1)! + 1, t), \quad r-k+1 \leq t \leq r.$$

Положим

$$X_{r-k} = (S_{r-1} + 1)! \dots (S_{r-k} + 1)! g_r \dots g_{r-k+1} S_{r-k+1} \dots S_2 S_1 = \\ = X_{r-k+1} (S_{r-k} + 1)! g_{r-k+1} / S_{r-k}.$$

Так как  $X_{r-k} / g_{r-k+1} X_{r-k+1} = (S_{r-k} + 1)! / S_{r-k}$ , то точки  $(iX_{r-k}, 0)$ ,  $0 \leq i \leq S_{r-k}$ , принадлежат нашей подтаблице  $(q_{ij})$ . Кроме того, так как  $S_{r-k} \geq W(2(S_{r-k-1} + 1)! + 1, r-k) \equiv W_{r-k}$ , то точки  $(iX_{r-k}, 0)$  содержат одноцветную арифметическую прогрессию из  $2(S_{r-k-1} + 1)! + 1$  членов, скажем  $((a_{r-k} + ig_{r-k})X_{r-k}, 0)$ ,  $0 \leq i \leq 2(S_{r-k-1} + 1)!$ , где  $g_{r-k} \leq W_{r-k}$ , и без ограничения общности можно предполагать, что эта прогрессия имеет цвет  $r-k$ . Расположение этих точек влечет за собой, что ни одна из точек подтаблицы  $(q_{ij})$  вида

$$q'_{ij} = \left( (a_{r-k} + ig_{r-k}) X_{r-k}, \frac{2Tj}{g_{r-k} X_{r-k} (S_{r-k-1} + 1)!} \right), \\ 0 \leq i \leq (S_{r-k-1} + 1)!, \quad 1 \leq j \leq S_{r-k-1} + 1,$$

не может иметь цвет  $r-k$ . Видим также, что пространство между соседними строками в  $(q'_{ij})$  равно

$$\frac{2T}{g_{r-k} X_{r-k} (S_{r-k-1} + 1)!} = \frac{2W_r!}{g_r} \frac{W_{r-1}!}{g_{r-1}} \dots \frac{W_{r-k}!}{g_{r-k}}.$$

Простой заменой координат приходим теперь к таблице вида (7.3) с  $r-k+1$  вместо  $r-k$ .

По завершении  $(r-2)$ -го шага, наконец, образуется прямоугольная таблица из точек  $p_{ij}^*$  (все цвета 1), которая может быть записана (в подходящей системе координат) как

$$p_{ij}^* = \left( ig_2 X_2, \frac{2T}{g_2 X_2 (S_1 + 1)!} j \right), \quad 0 \leq i \leq (S_1 + 1)!, \quad 0 \leq j \leq S_1 + 1,$$

где  $g_2 \leq W_2 \equiv W(2(S_1 + 1)! + 1, 2)$  и  $X_2 = (S_{r-1} + 1)! \dots (S_2 + 1)! g_r \dots g_3 S_1$ . Вертикальное строчечное пространство  $(p_{ij}^*)$  есть

$$\frac{2T}{g_2 X_2 (S_1 + 1)!} = \frac{2W_r! W_{r-1}! \dots W_2!}{g_r g_{r-1} \dots g_2}.$$

Однако три точки  $p_{00}^*, p_{20}^*, p_{01}^*$  образуют прямоугольный треугольник цвета 1 с площадью

$$(1/2) (2g_2 X_2) (2T/2g_2 X_2) = T,$$

поскольку  $S_1 = 1$ . Полученное противоречие завершает доказательство теоремы.  $\square$

Легко видеть, что использованные здесь рассуждения применимы и к прямоугольным таблицам. Таким образом, как непосредственное следствие теоремы 7.3 в подходящем масштабе получаем следующий результат, являющийся усилением гипотезы Гуревича.

**Следствие.** Для каждого  $\alpha > 0$  и любой пары непараллельных прямых  $L_1$  и  $L_2$  при любом разбиении плоскости на конечное количество классов некоторый класс содержит вершины треугольника, который имеет площадь  $\alpha$  и две стороны, параллельные прямым  $L_1$  и  $L_2$ .

Сравнительно просто распространить эти идеи на доказательства соответствующих результатов в  $\mathbb{E}^n$ , используя  $n$ -мерное обобщение теоремы ван дер Вардена для  $\mathbb{E}^n$ . Читатель не должен столкнуться с трудностями при детальном доказательстве следующего обобщения:

**Теорема 7.4.** Для каждого  $\alpha > 0$  и любого множества из  $n$  прямых  $L_1, \dots, L_n$ , которые порождают пространство  $\mathbb{E}^n$  (т. е. линейная оболочка которых и есть  $\mathbb{E}^n$ ),  $n \geq 2$ , при любом разбиении  $\mathbb{E}^n$  на конечное количество классов некоторый класс содержит вершины  $n$ -мерного симплекса, имеющего ( $n$ -мерный) объем  $\alpha$  и параллельные прямым  $L_i$  ребра, исходящие из одной вершины.

**Упражнение 7.6.** (а) Каково значение  $T(2)$  в теореме 7.3?

(б) Что можно сказать о  $T(3)$ ?

(с) Покажите, что  $T(r) \geq \text{н. о. к.}(2, 3, \dots, r)/2$  для каждого  $r$ .

**Упражнение 7.7** (Штраус). Покажите, что в теореме 7.3 «площадь 1» нельзя заменить на «периметр 1».

**Замечания.** Неизвестно, могут ли эти результаты распространяться на конфигурации более общие, нежели симплексы. Например, применима ли теорема 7.2 к параллелограммам (т. е. к четырем вершинам параллелограмма), ромбам, прямоугольникам? Разумеется, легко видеть, что она не выполняется для квадратов.

Имеется плотностный аналог теоремы 7.3, который можно доказать, исходя из теоремы Семереди вместо теоремы ван дер Вардена. Этот плотностный аналог утверждает, что для любого  $\varepsilon > 0$  существует целое  $T(\varepsilon)$ , такое, что если  $n \geq n(\varepsilon)$  и  $R \subseteq \{(i, j) : 1 \leq i, j \leq n\}$ ,  $|R| > \varepsilon n^2$ , то граф  $R$  содержит вершины треугольника площади  $T(\varepsilon)$ . Непрерывным аналогом служит

одна старая теорема Эрдёша, которая утверждает, что если  $X$  — неограниченное множество положительной меры на плоскости, то  $X$  содержит вершины треугольников всех площадей.

Наконец, было бы интересно получить несколько улучшенные оценки для функции  $T(r)$  из теоремы 7.3. Обладает ли эта функция в действительности гиперэкспоненциальным ростом аккермановского типа, как и верхние оценки для  $W(k, r)$ , или же на самом деле ее поведение более скромно?

## Глава 8

# ОБЩАЯ ТЕОРЕМА РАМСЕЕВСКОГО УМНОЖЕНИЯ

В этой короткой главе доказывается весьма общая теорема «умножения», которая приводит к нескольким интересным приложениям в теории Рамсея. Сначала введем некую терминологию:

Семейство  $\mathcal{F}$  из конечных подмножеств множества  $U$  называем рамсеевским, если для всех  $r \in \omega$  и всех  $r$ -раскрашиваний  $\chi: U \rightarrow [r]$  существует одноцветное  $F \in \mathcal{F}$ . Для данного произвольного отображения  $P: U \times U \rightarrow U$  семейство  $\mathcal{F}$  именуем  $P$ -идеалом множества  $U$ , если  $F \in \mathcal{F} \Rightarrow P(F, u) \in \mathcal{F}$ ,  $P(u, F) \in \mathcal{F}$ , для всех  $u \in U$ , где  $P$  продолжается на  $2^U \times 2^U$  обычным образом, т. е.  $P(X, Y) \equiv \{P(x, y): x \in X, y \in Y\}$  для  $X, Y \subseteq U$ .

Следующий, отчасти неожиданный результат показывает, что рамсеевское свойство выполняется одновременно для произвольных совокупностей рамсеевских семейств при весьма общих условиях.

**Теорема умножения.** Пусть  $\{\mathcal{F}_\alpha\}_{\alpha \in A}$  — произвольная совокупность из рамсеевских  $P$ -идеалов множества  $U$ , где отображение  $P: U \times U \rightarrow U$  произвольно. Тогда для любого  $r \in \omega$  и любого  $r$ -раскрашивания  $\chi: U \rightarrow [r]$  найдутся  $i \in [r]$  и  $F_\alpha \in \mathcal{F}_\alpha$ ,  $\alpha \in A$ , такие, что  $F_\alpha \subseteq \chi^{-1}(i)$  для всех  $\alpha \in A$ .

Иными словами, имеется один цвет  $i$ , в который одноцветные элементы  $F_\alpha \in \mathcal{F}_\alpha$  окрашены одновременно для всех  $\alpha \in A$ . Исходя из этого, техника доказательства должна быть достаточно простой (и использующей, разумеется, индуцированные раскраски), в связи с чем мы приводим (для полноты) компактный вариант доказательства [GS].

**Доказательство.** Сначала покажем, что для любого целого  $m$  и любой конечной подсовокупности  $\mathcal{F}_{\alpha_1}, \dots, \mathcal{F}_{\alpha_t}$  из  $\{\mathcal{F}_\alpha\}_{\alpha \in A}$  найдется конечное подмножество  $F = [\mathcal{F}_{\alpha_1}, \dots, \mathcal{F}_{\alpha_t}]_m$  из  $U$ , такое, что для всякого раскрашивания  $\chi: F \rightarrow [m]$  существуют  $i \in [m]$  и  $F_i \in \mathcal{F}_{\alpha_j}$ , для которых  $F_i \subseteq \chi^{-1}(i)$ ,  $1 \leq j \leq t$ . Для  $i = 1$  это сразу следует из теоремы компактности. Пусть  $\bar{i} > 1$  фиксировано, и предположим, что утверждение выполнено для всех  $t < \bar{i}$ . Оно очевидно выполняется при  $m = 1$ , поэтому пусть  $\bar{m} > 1$  фиксировано, и предположим, что утверждение также выполняется для  $t = \bar{i}$  и всех  $m < \bar{m}$ . Пусть  $\mathcal{F}_{\alpha_1}, \dots, \mathcal{F}_{\alpha_{\bar{i}}}$  — произвольная фиксированная подсовокупность  $\{\mathcal{F}_\alpha\}_{\alpha \in A}$ . Согласно предположению индукции, множества  $X = [\mathcal{F}_{\alpha_1}, \dots, \mathcal{F}_{\alpha_{\bar{i}-1}}]_{\bar{m}}$ ,  $Y = [\mathcal{F}_{\alpha_{\bar{i}}}]_{m^*}$ , где  $m^* = \bar{m}^{|\bar{i}|}$ , и  $Z = P(X, Y)$  существуют и конечны.

Пусть  $\chi: U \rightarrow [\bar{m}]$  — произвольное фиксированное  $\bar{m}$ -раскрашивание  $U$ . Определим индуцированное раскрашивание  $\chi^*$  множества  $Y$  так, что  $\chi^*(y) = \chi^*(y')$ ,  $y, y' \in Y$ , тогда и только тогда, когда  $\chi(P(x, y)) = \chi(P(x, y'))$  для всех  $x \in X$ .

Поскольку  $|P(X, y)| \leq |X|$  для всех  $y \in Y$ , то  $\chi^*$  является некоторым  $m^*$ -раскрашиванием множества  $Y$ . Согласно определению  $Y$ , существует  $F_i \in \mathcal{F}_{\alpha_i}$ , такое, что  $F_i \subseteq \chi^{*-1}(i)$  для некоторого  $i \in [m^*]$ . Пусть  $f \in F_i$ .

Теперь введем иное раскрашивание  $\chi': X \rightarrow [\bar{m}]$ , полагая  $\chi'(x) = \chi(P(x, f))$ ,  $x \in X$ . Заметим, что значения  $\chi'$  в действительности не зависят от выбора  $f$ .

Согласно определению  $X$ , существуют  $k \in [\bar{m}]$  и  $F_j \in \mathcal{F}_{\alpha_j}$ , такие, что  $F_j \subseteq \chi'^{-1}(k)$ ,  $1 \leq j \leq \bar{i} - 1$ . Стало быть,  $P(F_j, f) \subseteq \chi^{-1}(k)$ ,  $1 \leq j \leq \bar{i} - 1$ , и, значит,  $P(F_j, F_i) \subseteq \chi^{-1}(k)$ ,  $1 \leq j \leq \bar{i} - 1$ , поскольку  $\chi(P(x, f)) = \chi(P(x, f'))$ ,  $x \in X$  и  $f, f' \in F_i$ . Но  $P(F_j, f) \in \mathcal{F}_{\alpha_j}$ ,  $1 \leq j \leq \bar{i} - 1$ , поскольку  $\mathcal{F}_{\alpha_j}$  — это  $P$ -идеал, и по той же причине  $P(x, F_i) \in \mathcal{F}_{\alpha_i}$ . А так как все  $\bar{i}$  из этих множеств лежат в  $\chi^{-1}(k)$ , то  $P(X, Y)$  можно использовать как  $[\mathcal{F}_{\alpha_1} \dots \mathcal{F}_{\alpha_{\bar{i}}}]_{\bar{m}}$ . Это завершает индукционный переход, и тем самым первое утверждение доказано.

Предположим теперь, что теорема неверна. То есть при некотором  $r$  существуют раскрашивание  $\chi: U \rightarrow [r]$  и семейства  $\mathcal{F}_{\beta_i} \in \{\mathcal{F}_\alpha\}_{\alpha \in A}$ , такие, что

$$F_i \not\subseteq \chi^{-1}(i) \text{ для всех } F_i \in \mathcal{F}_{\beta_i}, 1 \leq i \leq r. \quad (8.1)$$

Согласно доказанному утверждению, (конечное) множество  $[\mathcal{F}_{\beta_1}, \dots, \mathcal{F}_{\beta_r}]_r \subseteq U$  существует. Таким образом, для некото-

рого  $k \in [r]$  и  $F'_j \subseteq \mathcal{F}_{\beta_j}$ , имеем  $F'_j \subseteq \chi^{-1}(k)$ ,  $1 \leq j \leq r$ . В частности,  $F'_k \subseteq \chi^{-1}(k)$  и  $F'_k \subseteq \mathcal{F}_{\beta_k}$  а это противоречит соотношению (8.1); тем самым теорема доказана.  $\square$

**Упражнение 8.1.** Докажите, что при любом конечном раскрашивании  $\mathbb{E}^2$  некоторый цвет содержит треугольники каждой площади. (Указание: воспользуйтесь теоремой умножения.)

## Глава 9

# ТЕОРЕМЫ ШУРА, ФОЛКМАНА И ХИНДМАНА

В 1916 г. Шур [Sc1] доказал теорему, являющуюся, по-видимому, наиболее ранним результатом ясно выраженного рамсеевского типа<sup>1)</sup>.

**Теорема 9.1.** Для каждого конечного раскрашивания множества  $\mathbb{Z}^*$  существует одноцветное решение уравнения

$$x + y = z. \quad (9.1)$$

**Доказательство.** Здесь поможет простое применение теоремы Рамсея. В качестве  $N$  возьмем число Рамсея  $R(2, 3, r)$  из гл. 2, и пусть  $\chi: [N] \rightarrow [r]$ . Это порождает некоторое  $r$ -раскрашивание  $\chi^*$  ребер графа  $K_N$  по правилу

$$\chi^*({i, j}) = \chi(|i - j|), \quad i \neq j \in [N].$$

По определению  $N$  граф  $K_N$  должен содержать одноцветный треугольник цвета  $\chi^*$ , скажем  $\{i, j, k\}$  с  $i < j < k$ . Таким образом,  $\chi(j - i) = \chi(k - j) = \chi(k - i)$ . Поэтому равенство  $(j - i) + (k - j) = k - i$  является одноцветным решением уравнения (9.1).  $\square$

Здесь, быть может, интересно отметить, что теорема 9.1 была нужна Шуру в связи с хорошо известным предположением Ферма:

Уравнение  $x^m + y^m = z^m$  не имеет решений в положительных целых для  $m \geq 3$ .

Шур показал, что для каждого  $m$  сравнение  $x^m + y^m \equiv z^m \pmod{p}$  всегда имеет решение для всех достаточно больших простых  $p$ . Чтобы убедиться в этом, обозначим через  $\mathbb{Z}_p$

<sup>1)</sup> За исключением, возможно, работы Гильберта [Н] 1892 г.

поле вычетов по модулю  $p$ , а через  $g$  первообразный корень по модулю  $p$  (т. е.  $g$  порождает  $\mathbb{Z}_p^*$ ). Также положим  $n = \text{н. о. д.}(m, p-1)$ . Тогда  $m$ -е степени в  $\mathbb{Z}_p$  суть в точности  $\{g^{mt}: t \in \mathbb{Z}\} = \{g^{nt}: t \in \mathbb{Z}\}$ , поскольку  $g^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ . Таким образом, можем предполагать, что  $m \mid (p-1)$ , поскольку  $n \mid (p-1)$ . Стало быть, каждый ненулевой  $x \in \mathbb{Z}_p$  можно записать в виде  $x = g^{i+mj}$ , где  $0 \leq i < m$  (так что такое  $i$  единственно). Определим  $m$ -раскрашивание  $\chi: \mathbb{Z}_p - \{0\} \rightarrow [m]$  по правилу  $\chi(g^{i+mj}) = i$ . Как видно из доказательства теоремы Шура, при достаточно большом  $p$  (например,  $p > R(2, 3; m)$ ) найдутся  $x, y, z \in \mathbb{Z}_p - \{0\}$ , удовлетворяющие равенству  $x + y = z$  и имеющие один и тот же цвет, скажем  $i$ . Поэтому  $x = g^{i+mj_x}, y = g^{i+mj_y}, z = g^{i+mj_z}$ . А поскольку  $x + y = z$ , имеем  $g^{i+mj_x} + g^{i+mj_y} \equiv g^{i+mj_z} \pmod{p}$ , и, умножая на  $g^{-i}$ , получаем  $g^{mj_x} + g^{mj_y} \equiv g^{mj_z} \pmod{p}$ , что и дает требуемое решение.  $\square$

В конце шестидесятых годов по крайней мере три автора [Sa; GR1; F1] независимо обнаружили следующее обобщение теоремы Шура. Этот результат обычно именуется теоремой Фолкмана в честь Джона Фолкмана, последнего в этом списке, а в действительности он первым представил доказательство<sup>1)</sup>. Сначала введем

**Определение.** Для  $A \subseteq \mathbb{Z}^+$  через  $\text{FS}(A)$  обозначим множество конечных сумм, образованных из элементов множества  $A$ , т. е.

$$\text{FS}(A) = \left\{ \sum_{i \in I} i : \emptyset \neq I \subset A, I \text{ конечно} \right\}.$$

**Теорема Фолкмана.** Для каждого конечного раскрашивания множества  $\mathbb{Z}^+$  существует сколь угодно большое подмножество  $A \subset \mathbb{Z}^+$  с одноцветным множеством  $\text{FS}(A)$ .

Приводимое здесь доказательство следует оригинальному доказательству Фолкмана (которое никогда не публиковалось). Прежде всего нам понадобится

**Лемма.** Для любых  $k, r \in \mathbb{Z}^+$  существует  $n = n(k, r)$ , такое, что при всяком  $r$ -раскрашивании  $\chi: [n] \rightarrow [r]$  всегда найдется  $A = \{a_1, \dots, a_k\} \subset \text{FS}(A) \subseteq [n]$ , так что  $\chi(\sum_{i \in I} i) = \chi(\max(I))$  для всех (непустых)  $I \subseteq A$ .

**Доказательство.** Проведем индукцию по  $k$ . Для  $k = 2$  лемма тривиальна. Предположим, что требуемое имеет место при некотором фиксированном значении  $k \geq 2$ . Утверждается, что

<sup>1)</sup> Как оказалось, этот результат также прямо следует из работы Радо тридцатых годов. Мы обсудим это в следующей главе.

можно взять в качестве  $n(k+1, r)$  величину  $2W^* = 2W(n(k, r) + 1, r)$ , где  $W$  — функция ван дер Вардена.

Чтобы убедиться в этом, положим  $\chi: [2W^*] \rightarrow [r]$  и обратимся ко второй части интервала, т. е.  $[W^* + 1, 2W^*]$ . По определению  $W^*$  она содержит топоч  $A$ . П. из  $n(k, r) + 1$  членов, скажем  $a_{k+1}, a_{k+1} + d, \dots, a_{k+1} + n(k, r)d$  — все красные.

Между тем, обращаясь к первой половине отрезка, рассмотрим множество  $d[n(k, r)] = \{d, 2d, \dots, dn(k, r)\}$ . По предположению индукции (наличие множителя  $d$  здесь ничего не меняет) найдутся  $da_1, \dots, da_k \in d[n(k, r)]$  (с тем свойством, что  $(da_1 + \dots + da_k) \leq dn(k, r) \leq W^*$ ), такие, что цвет любой частичной суммы зависит только от цвета наибольшего  $da_i$ . Эта ситуация проиллюстрирована на рис. 9.1.

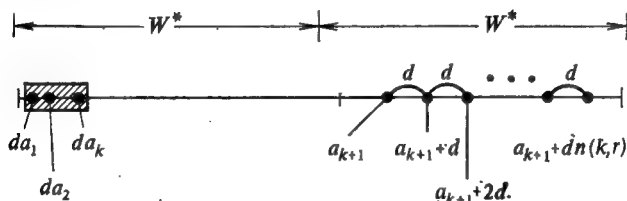


Рис. 9.1.

Искомое множество есть в точности  $A' = \{da_1, \dots, da_k, da_{k+1}\}$ . Если  $I \subseteq A'$ , то  $\chi(\sum_{i \in I} i) = \chi(\max(I))$  при  $a_{k+1} \notin I$  и равен  $\chi(a_{k+1}) = \chi(\max(I))$  при  $a_{k+1} \in I$ . Это завершает индукционный переход, и тем самым лемма доказана.  $\square$

Для завершения доказательства теоремы Фолкмана предположим, что  $r, k \in \mathbb{Z}^+$  и  $\chi: \mathbb{Z}^+ \rightarrow [r]$  заданы. Выделим (используя лемму) множество  $A = \{a_1, \dots, a_{r(k-1)+1}\}$ , такое, что  $\chi(\sum_{i \in I} i)$  для  $I \subseteq A$  зависит только от  $\max(I)$ . Таким образом, каждый индекс  $j \in [r(k-1)+1]$  обозначает цвет (это и есть индуцированное раскрашивание), именно цвет, задаваемый значением  $\chi(\sum_{i \in I} i)$ , где  $\max(I) = a_j$ . Согласно принципу ящиков,  $k$  различных индексов из  $[r(k-1)+1]$ , скажем  $j_1, j_2, \dots, j_k$ , должны иметь один и тот же цвет. Тогда множество  $A^* = \{a_{j_1}, a_{j_2}, \dots, a_{j_k}\}$  обладает требуемым свойством, т. е.  $FS(A^*)$  одноцветно.  $\square$

Было бы интересно выяснить, можно ли теорему Фолкмана вывести непосредственно из теоремы Рамсея (подобно доказательству теоремы Шура).

Недавно А. Тейлор [Та] предложил иное доказательство теоремы Фолкмана. Его доказательство, в котором не используется теорема ван дер Вардена, проще имевшихся и в действи-

тельности дает верхние оценки (для конечного аналога), которые можно выразить в элементарных функциях. Именно, Тейлор показал, что если  $S(k, r)$  обозначает наименьшее целое, такое, что при любом  $r$ -раскрашивании  $[S(k, r)]$  найдется  $k$ -множество  $A \subseteq [S(k, r)]$  с одноцветным  $\text{FS}(A)$ , то

$$S(k, r) \leq 2^{2r(k-1)}, \quad k, r \geq 2.$$

**Упражнение 9.1.** Покажите, что если  $A = \{a_1 < a_2 < \dots\}$  и разность  $a_{n+1} - a_n$  ограничена, то для любого  $k$  найдутся  $B = \{b_1, \dots, b_k\}$  и  $t$ , такие, что  $t + \text{FS}(B) \subseteq A$ .

**Упражнение 9.2.** Покажите, что теорема Фолкмана эквивалентна следующему утверждению: для любого конечного раскрашивания конечных подмножеств  $\omega$  всегда можно найти  $k$  непересекающихся непустых подмножеств  $S_1, \dots, S_k$ , таких, что все (непустые) объединения этих  $S_i$  имеют один и тот же цвет. (Указание: рассмотрите разложения  $i \in \mathbb{Z}^+$  по основанию 2 и используйте усиление теоремы Рамсея, которое гарантирует, что в любом конечном раскрашивании конечных подмножеств  $\omega$  найдется  $l$ -множество  $L$ , такое, что для всех  $I \subseteq L$ ,  $|I| \leq k$ , цвет  $I$  зависит только от  $|I|$ . Конечно, как «подупражнение» это тоже нужно доказать.)

**Упражнение 9.3.** Постройте 2-раскрашивание конечных подмножеств  $\omega$ , такое, что для каждого бесконечного  $X \subseteq \omega$  найдутся  $A, B \subset X$ , имеющие различные цвета и  $|A| = |B|$ .

**Упражнение 9.4.** Докажите аналог (конечный вариант) теоремы Фолкмана для групп. Иными словами, докажите, что для всех  $k, r \in \mathbb{Z}^+$  существует  $n'(k, r)$ , такое, что если  $\chi: G \rightarrow [r]$  есть произвольное  $r$ -раскрашивание группы  $G$  с  $|G| \geq n'(k, r)$ , то должна существовать подгруппа  $X \subseteq G$  с  $|X| = k$ , такая, что все непустые (групповые) произведения, образуемые из элементов подгруппы  $X$ , имеют один и тот же цвет. (Указание: используйте тот факт, что большие группы содержат большие абелевы подгруппы<sup>1)</sup>.)

После того как теорема Фолкмана стала известна, возник естественный вопрос: верен ли ее бесконечный аналог? Он был поставлен в конце шестидесятых годов независимо в работах [Sa] и [GR1]. Должно отметить, что ответ на него непосредственно не следует из соображений компактности, и сам вопрос оставался открытым до 1974 г., когда Хиндман [Hil] предло-

<sup>1)</sup> Желая удачи.



жил в высшей степени изобретательное доказательство для бесконечного аналога. Впоследствии его упростил Баумгартнер [В] и сильно сократил Глазер (с использованием ультрафильтров) [Г]. За последние несколько лет проявился фундаментальный характер теоремы Хиндмана в дальнейших исследованиях этой ветви теории Рамсея. Точности ради, приведем ее здесь во всей полноте.

**Теорема Хиндмана.** *Для каждого конечного раскрашивания множества  $\mathbb{Z}^+$  всегда найдется бесконечное подмножество  $A \subseteq \mathbb{Z}^+$  с одноцветным FS(A).*

**Упражнение 9.5 (Натансон).** Покажите, что имеет место бесконечный аналог упр. 9.1.

## Глава 10

# ТЕОРЕМА РАДО

Р. Радо начиная с 1933 г. опубликовал целый ряд ярких результатов в серии работ [Ra1, 2, 3] (на основе своей диссертации, выполненной, кстати, под руководством И. Шура), полностью осветивших следующий вопрос:

Какие системы  $\mathcal{L} = \mathcal{L}(x_1, \dots, x_n)$  однородных линейных уравнений над  $\mathbb{Z}$  обладают тем свойством, что при любом конечном раскрашивании  $\mathbb{Z}^+$  система  $\mathcal{L}$  обладает одноцветным решением?

Ответ на этот вопрос Радо дал в виде весьма компактного необходимого и достаточного условия, называемого условием столбцов. Как оказалось, он унифицировал доказательства теорем Шура, ван дер Вардена и Фолкмана. Тем самым была достигнута высокая ясность их понимания как определенных свойств разбиений рациональных решений линейных уравнений.

В этой главе докажем частный случай теоремы Радо, в котором содержится большинство существенных моментов. Это случай, в котором  $\mathcal{L}$  состоит из единственного уравнения  $L: \sum_{i=1}^n c_i x_i = 0$ ,  $c_i \in \mathbb{Z} - \{0\}$ . Будем называть  $L$  регулярным, если каждое конечное раскрашивание множества  $\mathbb{Z}^+$  содержит одноцветное решение уравнения  $L$ .

**Теорема Радо** (одно уравнение). Уравнение  $L$  регулярно тогда и только тогда, когда некоторая непустая сумма его коэффициентов равна нулю.

Например, уравнения  $x + y - z = 0$ ,  $x + y - 2z = 0$  регулярны, а  $x + y - 3z = 0$  нет.

**Упражнение 10.1.** Найдите конечное раскрашивание множества  $\mathbb{Z}^+$ , при котором уравнение  $x + y - 3z = 0$  не имеет одноцветного решения.

Для доказательства теоремы Радо прежде всего понадобится следующее усиление теоремы ван дер Вардена.

**Теорема ван дер Вардена** (сильная форма). Для любых  $k, r, s \in \mathbb{Z}^+$  существует  $N = N(k, r, s)$ , такое, что если  $[N]$  является  $r$ -раскрашенным, то всегда найдутся  $a, d \in \mathbb{Z}^+$ , такие, что  $a + d, a + 2d, \dots, a + kd$  и  $sd$  имеют один и тот же цвет.

Иными словами, не только есть  $k$ -членная А. П.  $\{a + jd: j \in [k]\}$  — монох, но и  $sd$  также имеет тот же самый цвет.

**Доказательство.** Используем индукцию по  $r$ . Для  $r = 1$  можно взять  $d = 1$  и  $N = \max\{k + 1, s\}$ . Для фиксированного  $r \geq 2$  предположим, что  $N(k, r - 1, s)$  существует для всех  $k$  и  $s$ . Пусть  $\bar{N} = sW(kN(k, r - 1, s), r)$ , где, как обычно,  $W$  — функция ван дер Вардена, и пусть раскрашивание  $\chi: [\bar{N}] \rightarrow [r]$  произвольно. Таким образом, можем найти  $a, d' \in \mathbb{Z}^+$ , такие, что  $[W(kN(k, r - 1, s), r)] \supseteq \{a + id': 1 \leq i \leq kN(k, r - 1, s)\}$  — монох, скажем красные. Имеются две возможности:

(a)  $sd'j$  красное для некоторого  $j \in [N(k, r - 1, s)]$ . Возьмем  $d = jd'$ ; тогда  $a + d, a + 2d, \dots, a + kd = a + kjd'$  и  $sd = sd'j$  все красные и, значит,  $N(k, r, s)$  существует;

(b)  $sd'j$  не красное для всех  $j \in [N(k, r - 1, s)]$ . Стало быть, точки  $sd'[N(k, r - 1, s)]$  имеют  $(r - 1)$  цветов, и это очевидно индуцирует некоторое  $(r - 1)$ -раскрашивание  $[N(k, r - 1, s)]$ . По определению  $N(k, r - 1, s)$  существуют  $A + D, A + 2D, \dots, A + kD$  и  $sD$ , имеющие один и тот же цвет, скажем голубой. Таким образом, в исходном раскрашивании  $sd'(A + D), sd'(A + 2D), \dots, sd'(A + kD)$  и  $sd'(sD)$  все голубые, т. е.  $sd'A + sd'D, sd'A + 2sd'D, \dots, sd'A + ksd'D$  и  $s(sd'D)$  тоже голубые.

Значит, и в этом случае  $N(k, r, s)$  тоже существует. Это завершает индукционный переход, и тем самым результат доказан.  $\square$

**Следствие.** Для любых  $k, s \in \mathbb{Z}^+$  и произвольного конечного раскрашивания множества  $\mathbb{Z}^+$  найдутся  $a, d \in \mathbb{Z}^+$ , такие, что

$$\{a + \lambda d: |\lambda| \leq k\} \cup \{ds\} \text{ — монох.}$$

**Доказательство теоремы Радо.** (1) Предположим, что сумма некоторых коэффициентов равна нулю. Переобозначим их так, что  $c_1 + c_2 + \dots + c_k = 0$ . Пусть  $\chi$  — некоторое  $r$ -раскрашивание множества  $\mathbb{Z}^+$ . Если  $k = n$ , положим  $x_1 = \dots = x_n = 1$ . Это, очевидно, одноцветное решение уравнения  $L$ . Таким образом, далее считаем, что  $k < n$ . Положим  $A = \text{н. о. д.}(c_1, \dots, c_k)$ ,  $B = c_{k+1} + \dots + c_n$ ,  $s = A/\text{н. о. д.}(A, B)$ .

Если  $B = 0$ , то  $c_1 + \dots + c_n = 0$ , и вновь  $x_1 = \dots = x_n = 1$  есть одноцветное решение уравнения  $L$ . Следовательно, можем считать, что  $B \neq 0$ . Значит, найдется  $t \in \mathbb{Z}$ , такое, что  $At + Bs = 0$ . Кроме того, можно найти  $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{Z}$ , такие, что  $c_1\lambda_1 + \dots + c_k\lambda_k = At$ . Утверждаем теперь, что  $L$  для всякого  $d \in \mathbb{Z}^+$  и любого  $a$  имеет параметрическое решение вида

$$x_i = \begin{cases} a + \lambda_i d, & i \in [k], \\ sd, & i > k. \end{cases}$$

Действительно,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n c_i x_i &= \sum_{i=1}^k c_i x_i + \sum_{i>k} c_i x_i = \sum_{i=1}^k c_i (a + \lambda_i d) + \sum_{i>k} c_i sd = \\ &= a \sum_{i=1}^k c_i + d \sum_{i=1}^k c_i \lambda_i + sd \sum_{i>k} c_i = a \cdot 0 + dAt + dsB = 0. \end{aligned}$$

Наконец, выберем  $k_0 > \max_i |\lambda_i|$ , а  $s$ , как и раньше. Согласно следствию, найдутся  $a, d \in \mathbb{Z}^+$ , такие, что  $\{a + \lambda d : |\lambda| \leq k_0\} \cup \{sd\}$  — монох. Однако по определению  $k_0$  это множество содержит решение уравнения  $L$ , и, значит, (1) доказано.

(2) Для доказательства в обратную сторону предположим, что не существует непустой суммы коэффициентов  $c_i$ , равной нулю. Выберем большое простое  $p$  и определим раскрашивание  $\chi_p$  множества  $\mathbb{Z}^+$  следующим образом:  $x \in \mathbb{Z}^+$  представляем в виде  $x = p^\alpha(pt + k)$ ,  $1 \leq k \leq p-1$ , и полагаем  $\chi_p(x) = k$ . Таким образом,  $\chi_p$  есть  $(p-1)$ -раскрашивание  $\mathbb{Z}^+$ .

Предположим, что уравнение  $\sum_{i=1}^n c_i x_i = 0$  имеет одноцветное решение при раскраске  $\chi_p$ , скажем цвета  $k$ . Пусть  $x_i = p^{\alpha_i} \times (pt_i + k)$  — такое решение. Предполагаем без ограничения общности, что  $\alpha_1 = \dots = \alpha_s < \alpha_{s+1} \leq \alpha_{s+2} \leq \dots \leq \alpha_n$ ,  $s \geq 1$  (допускается  $s = n$ ). Тогда  $\sum_{i=1}^n c_i x_i = \sum_{i=1}^n c_i p^{\alpha_i} (pt_i + k) = 0$ , и, следовательно,

$$\sum_{i=1}^s c_i (pt_i + k) \equiv 0 \pmod{p}, \quad \sum_{i=1}^s c_i k \equiv 0 \pmod{p},$$

т. е. 
$$\sum_{i=1}^s c_i \equiv 0 \pmod{p}.$$

Однако если  $p$  выбрано достаточно большим, например  $p > \sum_{i=1}^n |c_i|$ , то с необходимостью  $\sum_{i=1}^s |c_i| = 0$ . Это противоречит предположенному в (2), и тем самым теорема Радо (для одного уравнения) доказана.  $\square$

Для того чтобы сформулировать необходимые и достаточные условия Радо (условия столбцов) для регулярности системы линейных однородных уравнений  $\mathcal{L}$ , представим  $\mathcal{L}$  в матричной форме:  $A\bar{x} = \bar{0}$ , где  $A = (a_{ij})$  — это  $k \times n$ -матрица с целыми коэффициентами и  $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n)^T$ . Будем говорить, что  $A$  удовлетворяет «условиям столбцов», если можно разбить столбцы матрицы  $A$  в непустые непересекающиеся подмножества (столбцов)  $C_1 \cup \dots \cup C_s = A$  так, что

$$\begin{aligned} \sum_{\bar{c} \in C_1} \bar{c} &= \bar{0}, \quad \sum_{\bar{c} \in C_2} \bar{c} \in \langle C_1 \rangle, \\ \sum_{\bar{c} \in C_3} \bar{c} &\in \langle C_1, C_2 \rangle, \dots, \sum_{\bar{c} \in C_s} \bar{c} \in \langle C_1, \dots, C_{s-1} \rangle, \end{aligned} \quad (\text{CC})$$

где  $\bar{c}$  обозначает вектор-столбец матрицы  $A$ , а  $\langle X, Y, \dots \rangle$  — векторное пространство над  $\mathbb{Q}$ , порожденное множествами векторов  $X, Y, \dots$ .

В качестве примера читателю предлагается показать, что следующая система удовлетворяет (CC):

$$\begin{aligned} 4u - 3v - 5x + y + 2z &= 0, \\ 2u + v + 3x + 2y - 3z &= 0, \\ 3u - 2v + x + 3y - z &= 0. \end{aligned}$$

(Указание: не забывайте, что можно брать рациональные линейные комбинации.)

Теперь можно сформулировать общий случай.

**Теорема Радо (общий случай).** Система однородных линейных уравнений над  $\mathbb{Z}$  регулярна тогда и только тогда, когда она удовлетворяет «условию столбцов».

(Заметьте, что здесь есть и теорема об одном уравнении.)

Имеется иная формулировка теоремы Радо:

*Система регулярна, если она имеет топо $\chi_p$ -решение для каждого раскрашивания  $\chi_p$  и простого  $p$ .*

Другими словами, если при каком-то раскрашивании одноцветного решения нет, то его нет и при некотором  $\chi_p$  (упр. 10.1).

Детали доказательства (в действительности они не слишком трудны) см. в [GRS; Ra2].

**Упражнение 10.2.** Покажите, что из теоремы Радо следует теорема ван дер Вардена.

**Упражнение 10.3.** Покажите, что из теоремы Радо следует теорема Фолкмана.

**Упражнение 10.4.** Найдите необходимое и достаточное условие для того, чтобы уравнение  $\sum_{i=1}^n c_i x_i = 0$  было разрешимо с  $x_i \in A$ , где  $A$  — произвольное подмножество из  $\mathbb{Z}^+$  положительной верхней плотности (т. е.  $\limsup_n |A \cap [n]|/n > 0$ ).

## Глава 11

# СОВРЕМЕННЫЕ ВОПРОСЫ ТЕОРИИ

В этой заключительной главе остановимся на некоторых направлениях теории Рамсея. Из-за недостатка места мы познакомимся с этими областями вкратце, но хочется надеяться, что у читателя когда-нибудь появится желание более подробно разобраться в некоторых из этих вопросов.

Начнем с того, что Фюрстенберг благодаря своим исследованиям по эргодической теории дал совершенно иное доказательство теоремы Семереди. Более того, используя такой подход, Фюрстенберг и Кацнельсон [FuK] доказали  $n$ -мерный аналог теоремы Семереди, который не поддавался другим методам. Вообще говоря, элементарные соображения эргодической теории и теории динамических систем уже использовались в топологических доказательствах теорем ван дер Вардена и Хиндмана.

Приведем несколько результатов такого типа.

**Теорема** (Фюрстенберг, Вейс [FuW]). Пусть  $T: X \rightarrow X$  — некоторый гомеоморфизм компактного метрического пространства  $(X, d)$  в себя. Тогда для любых  $\varepsilon > 0$ ,  $k \in \mathbb{Z}^+$  существуют  $x \in X$ ,  $n \in \mathbb{Z}^+$ , такие, что  $d(x, T^n x) < \varepsilon$ . (Это влечет теорему ван дер Вардена.)

**Теорема** (Фюрстенберг [Fu1]). Пусть  $T: X \rightarrow X$  — некоторое сохраняющее меру преобразование конечного метрического пространства  $(X, \mu)$  в себя. Тогда для любого  $A \subseteq X$  положительной меры существует  $n \in \mathbb{Z}^+$ , такое, что  $\mu(A \cap T^n A \cap \dots \cap T^{kn} A) > 0$ . (Это влечет теорему Семереди.)

Подробно эти результаты обсуждаются в работе [Fu2].

Возможно, такой контакт эргодической теории с комбина-

торикой породит плодотворный союз этих дисциплин.

Напомним, что система линейных однородных уравнений называется регулярной, если она обладает одноцветными решениями при любом конечном раскрашивании множества  $\mathbb{Z}^+$ . Будем называть подмножество  $X \subseteq \mathbb{Z}^+$  регулярным, если каждая регулярная система  $\mathcal{L}$  разрешима в  $X$ .

**Упражнение 11.1 (Радо).** Покажите, что если  $\mathbb{Z}^+ = C_1 \cup \dots \cup C_r$ , то некоторое  $C_i$  регулярно. (Указание: используйте теорему умножения.)

В 1973 г. Дьюбер [D1] разрешил гипотезу Радо сорокалетней давности.

**Теорема.** Если  $X \subseteq \mathbb{Z}^+$  регулярно и  $X = C_1 \cup \dots \cup C_r$ , то некоторое  $C_i$  регулярно.

Доказательство Дьюбера, использующее понятие так называемого  $(n, p, c)$ -множества, обеспечило весьма существенное продвижение в этой области рамсеевской теории.

Параллельно с этим в последние несколько лет принципиально новое направление начало разрабатываться Пари и Харрингтоном [РН]. Лишь слегка (!) модифицировав утверждение (конечного аналога) теоремы Рамсея, они получили первый пример «естественной» теоремы, недоказуемой в арифметике Пеано первого порядка. Одна из простейших форм такого утверждения имеет следующий вид. Множество  $A \subseteq \mathbb{Z}^+$  называем большим, если  $|A| \geq \text{min}(A)$ .

**Теорема (Пэрис, Харрингтон [РН]).** Для любых  $k, r \in \mathbb{Z}^+$  найдется целое  $m = \text{РН}(k, r)$ , такое, что для каждого  $r$ -раскрашивания всех  $k$ -подмножеств множества  $[m]$  найдется большое множество  $X \subseteq [m]$ ,  $|X| > k$ , такое, что все  $k$ -подмножества  $X$  имеют один и тот же цвет. Однако этот результат не может быть доказан в арифметике Пеано первого порядка.

Существование  $\text{РН}(k, r)$  сразу следует из бесконечного варианта теоремы Рамсея (поскольку каждое бесконечное множество содержит большое подмножество). Вместе с тем Пари и Харрингтон показали, что это не выводимо в рамках арифметики Пеано первого порядка. Одно из объяснений, почему так происходит, состоит в том, что нижние оценки для  $\text{РН}(k, r)$  растут так быстро, что в арифметике Пеано первого порядка нельзя доказать даже их корректность. Последнее, в частности, навело Соловея [So] и ряд других специалистов на мысль о том, что известные оценки аккермановского типа для функций ван дер Вардена и Халеса — Джеветта все-таки отражают реальную ситуацию. Интуиция автора подсказывает ему, что это, по-видимому, не так.

В этой связи отметим два следующих результата.

1. Пусть  $n(k)$  обладает тем свойством, что любое 2-раскрашивание множества  $\{[\alpha x + \beta]: x = 1, 2, \dots, n(k)\}$  содержит  $k$ -членную А. П. Такие множества обладают рядом общих свойств с А. П. (хотя их и больше). Какую величину можно взять в качестве  $n(k)$ ? Оказывается<sup>1)</sup>, достаточно величины порядка  $ck^2$ .

2. Предположим, что последовательность  $A = \{a_1 < a_2 < \dots\}$  имеет ограниченные дыры, скажем  $a_{n+1} - a_n \leq B$ . Какое число  $w(k, B)$  членов последовательности  $A$  необходимо взять, чтобы среди них нашлась  $k$ -членная А. П.? Можно было бы ожидать, что условие регулярности, наложенное на  $A$ , позволит получить оценку сверху для  $w(k, B)$ , например, в терминах примитивно рекурсивных функций. Однако, как заметил Натансон<sup>2)</sup>, функция  $w(k, B)$ , по существу, ведет себя так же, как и  $W(k, B)$  — обычная функция ван дер Вардена. С одной стороны, можно  $B$ -раскрасить множества  $\mathbb{Z}^+$ , приписывая  $x$  цвет  $i$ , если  $a_n + i = x < a_{n+1}$  для некоторого  $i \in \{0, 1, \dots, B-1\}$ . Значит, всякая одноцветная  $k$ -членная А. П. цвета  $i$  должна быть сдвигом (на  $i$ ) некоторой  $k$ -членной А. П. цвета 0, т. е. из  $A$ , и, следовательно,  $w(k, B) \leq W(k, B)$ . С другой стороны, рассмотрим  $\chi: \mathbb{Z}^+ \rightarrow [B]$ . Определим последовательность  $A(\chi) = \{a_1, a_2, \dots\}$ , полагая  $a_k = (k-1)B + \chi(k)$ ,  $k \in \mathbb{Z}^+$ . Таким образом,  $a_{n+1} - a_n < 2B$ . Однако если  $c + d, c + 2d, \dots, c + kBd$  есть  $kB$ -членная А. П. в  $A(\chi)$ , то  $B$ -е члены ее, скажем  $c + Bd, c + 2Bd, \dots, c + kBd$ , имеют один и тот же  $\chi$ -цвет. Стало быть,  $W(k, B) \leq w(kB, 2B)$ .

В недавней (неопубликованной) работе Миллс показал, что определенные функции, связанные с помеченными деревьями, неожиданно (для меня) дают сверхвзрывной рост (и могут использоваться для двустороннего оценивания функции Пари — Харрингтона). Только время покажет<sup>3)</sup>, что же на самом деле верно для функции ван дер Вардена.

Ранее уже упоминались некоторые из примечательных результатов, достигнутых не так давно Нешетрилем и Рёдлем. Они преуспели в доказательствах большого числа утверждений, которые можно было бы назвать рамсеевскими результатами с «ограничениями». Так, например, если  $G$  — это  $K_n$ -свободный граф, то существует  $K_n$ -свободный граф  $H$ :  $H \rightarrow (G, G)$ . Или же: для любых  $k, r \in \mathbb{Z}^+$  найдется множество  $A \subseteq \mathbb{Z}^+$ , не содержащее  $(k+1)$ -членной А. П., такой, что каждое  $r$ -раскрашивание  $A$  должно всегда содержать одноцветную  $k$ -членную А. П. Обзор этих результатов представлен в [NR1, 3].

<sup>1)</sup> Неопубликованная работа Абрамсона, Бурра и Эрдёша.

<sup>2)</sup> В ходе настоящей конференции.

<sup>3)</sup> А мы, быть может, этого и не увидим.

Недавно ряд исследователей, включая, в частности, Хиндмана, Баумгартнера, Глейзера, Тейлора и Гальвина, предприняли попытку изучения бесконечных аналогов рамсеевских теорем с помощью ультрафильтров. В частности, Глейзер получил на этом пути короткое доказательство теоремы Хиндмана. Удобочитаемое изложение этих исследований можно найти в [Hi2]. В этой связи Хиндман исследовал вопрос о возможности усиления своей теоремы для бесконечных множеств со всеми одноцветными конечными суммами. Ограничиваясь рассмотрением степеней двойки, легко видеть, что каждое конечное раскрашивание множества  $\mathbb{Z}^+$  содержит бесконечное множество со всеми своими конечными произведениями, имеющими один и тот же цвет. Хиндман показал, что нельзя гарантировать наличие одноцветности всех произведений и всех сумм одновременно. В частности, в [Hi3] он привел 7-раскрашивание  $\chi: \mathbb{Z}^+ \rightarrow [7]$ , при котором не существует бесконечного множества  $A: A \subseteq \chi^{-1}(i)$ ,  $\{a + a': a \neq a' \in A\} \subseteq \chi^{-1}(i)$ ,  $\{a \cdot a': a \neq a' \in A\} \subseteq \chi^{-1}(i)$  для некоторого  $i$ . Возможно, такое  $A$  и существует, если опустить условие  $A \subseteq \chi^{-1}(i)$ .

Здесь вопрос открыт и для конечного случая.

*Вопрос.* Верно ли, что при любом конечном раскрашивании множества  $\mathbb{Z}^+$  найдется сколь угодно большое (конечное) множество  $A$ , все суммы и произведения из которого имеют один и тот же цвет?

Вероятно, наибольшее число публикаций в последнее время пришлось на рамсеевскую теорию графов; в ней было введено много новых понятий, ознакомиться с которыми можно по работам [Buc; LeR; EFRS; ChuL] и обзорам [Bu1, 2; BCL-F; Pa].

Большой и важной областью теории Рамсея, не затронутой нами, является так называемое исчисление разбиений Эрдеша и Радо. Это в основном рамсеевская теория бесконечных кардиналов и ординалов. Типичный результат этого направления представляет

**Теорема.**  $(\omega^\omega) \rightarrow (\omega^\omega, 3)^2$ .

(Впоследствии снабженная весьма элегантным доказательством Ларсона [La].)

То есть если пары из множества порядкового типа  $\omega^\omega$  2-раскрашены, то найдется либо множество порядкового типа  $\omega^\omega$  со всеми парами, имеющими цвет 1, либо 3-элементное множество со всеми парами, имеющими цвет 2.

Подводя последний итог знакомства с этой теорией, адресуем читателя к ожидающейся (?) книге Эрдеша, Хайнала, Мате и Радо [ENMR] (которая, к сожалению, существует лишь в виде препринта). Многое из этого можно также найти в [W].



# Литература<sup>1)</sup>

- [B] J. Baumgartner, *A short proof of Hindman's theorem*, J. Combinatorial Theory Ser. A 17 (1974), 384–386.
- [BCL-F] M. Behzad, G. Chartrand and L. Lesniak-Foster, *Graphs and digraphs*, Prindle, Weber & Schmidt, Boston, Mass., 1979.
- [Be] E. R. Berlekamp, *A construction for partitions which avoid long arithmetic progressions*, Canad. Math. Bull. 11 (1968), 400–414.
- [Bo] B. Bollobás, *Extremal graph theory*, Academic Press, London, 1978.
- [BrE] N. G. de Bruijn and P. Erdős, *A colour problem for infinite graphs and a problem in the theory of relations*, Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Sér. A 54 (1951), 371–373.
- [Buc] F. Buckley, *Graph functions which are Ramsey functions*, Ann. New York Acad. Sci. 328 (1979), 52–57.
- [Bul] S. A. Burr, *Generalized Ramsey theory for graphs—A survey*, Graphs and Combinatorics, Springer-Verlag, Berlin, 1974, pp. 52–75.
- [Bu2] ———, *A survey of noncomplete Ramsey theory for graphs*, Ann. New York Acad. Sci. 328 (1979), 58–75.
- [BuE] S. A. Burr and P. Erdős, *Extremal Ramsey theory for graphs*, Utilitas Math. 9 (1976), 247–258.
- [BuES] S. A. Burr, P. Erdős and J. H. Spencer, *Ramsey theorems for multiple copies of graphs*, Trans. Amer. Math. Soc. 209 (1975), 87–99.
- [BuFS] S. A. Burr, R. J. Faudree and R. H. Schelp, *On Ramsey-minimal graphs*, Proc. Eighth Southeastern Conf. on Comb., Graph Theory and Computing, Utilitas Math. Pub., Winnipeg, 1977, pp. 115–124.
- [Cha] C. C. Chang, *A-partition theorem for the complete graph on  $\omega^\omega$* , J. Combinatorial Theory Ser. A 12 (1972), 396–452.
- [Ch] F. R. K. Chung, *A note on constructive methods for Ramsey numbers*, I. Graph Theory (to appear).
- [ChG] F. R. K. Chung and R. L. Graham, *On multicolor Ramsey numbers for complete bipartite graphs*, J. Combinatorial Theory Ser. A 18 (1975), 164–169.
- [ChuL] K. M. Chung and C. L. Liu, *A generalization of Ramsey theory for graphs*, Discrete Math. 21 (1978), 117–127.
- [Chv1] V. Chvátal, *Remarks on a problem of Moser*, Canad. Math. Bull. 15 (1972), 19–21.
- [Chv2] ———, *Tree-complete graph Ramsey numbers*, J. Graph Theory 1 (1977), 93.
- [ChvH1] V. Chvátal and F. Harary, *Generalized theory for graphs*, Bull. Amer. Math. Soc. 78 (1972), 423–426.

<sup>1)</sup> Работы, помеченные знаком \*, имеются на русском языке (см. список на с. 76).

- [ChvH2] —, *Generalized Ramsey theory for graphs. III. Small off-diagonal numbers*, Pacific J. Math. **41** (1972), 335–345.
- [D1] W. Deuber, *Partitionen und Lineare Gleichungssysteme*, Math. Z. **133** (1973), 109–123.
- [D2] —, *Partitionstheoreme für Graphen*, Math. Helv. **50** (1975), 311–320.
- [E1] P. Erdős, *Some remarks on the theory of graphs*, Bull. Amer. Math. Soc. **53** (1947), 292–294.
- [E2] —, *Extremal problems in graph theory, Theory of graphs and its applications*, Proc. Sympos. Smolenice, Publ. Czechoslovak Acad., Prague, 1964, pp. 29–36.
- [EFRS] P. Erdős, R. J. Faudree, C. C. Rousseau and R. H. Schelp, *The size Ramsey number*, Period. Math. Hungar. **9** (1978), 145–161.
- [EG] P. Erdős and R. L. Graham, *On partition theorems for finite graphs*, Colloq. Math. Soc. János Bolyai, vol. 10, Infinite and Finite Sets, Keszthely, Hungary, 1973, pp. 515–527.
- [EGMRSS1] P. Erdős, R. L. Graham, P. Montgomery, B. L. Rothschild, J. Spencer and E. G. Straus, *Euclidean Ramsey Theorems. I*, J. Combinatorial Theory Ser. A **14** (1973), 341–363.
- [EGMRSS2] —, *Euclidean Ramsey Theorems. II*, Colloq. Math. Soc. János Bolyai, vol. 10, Infinite and Finite Sets, Keszthely, Hungary and North-Holland, Amsterdam, 1973, 520–557.
- [EGMRSS3] —, *Euclidean Ramsey Theorems. III*, Colloq. Math. Soc. János Bolyai, vol. 10, Infinite and Finite Sets, Keszthely, Hungary and North-Holland, Amsterdam, 1973, pp. 559–583.
- [EH] P. Erdős and A. Hajnal, *On chromatic number of graphs and set-systems*, Acta. Math. Acad. Sci. Hungar. **17** (1966), 61–99.
- [EHMR] P. Erdős, A. Hajnal, A. Mate and R. Rado, *Combinatorial set theory: Partition relations for cardinals* (to appear).
- \* [ES] P. Erdős and J. Spencer, *Probabilistic methods in combinatorics*, Academic Press, New York, 1974.
- [ET] P. Erdős and P. Turán, *On some sequences of integers*, J. London Math. Soc. **11** (1936), 261–264.
- [F1] J. Folkman, personal communication.
- [F2] —, *Graphs with monochromatic complete subgraphs in every edge coloring*, SIAM J. Appl. Math. **18** (1970), 19–24.
- [Fr] P. Frankl, *A constructive lower bound for some Ramsey numbers*, Ars Combinatoria **3** (1977), 297–302.
- [Fu1] H. Furstenberg, *Ergodic behavior of diagonal measures and a theorem of Szemerédi on arithmetical progressions*, J. Analyse Math. **31** (1977), 204–256.
- [Fu2] H. Furstenberg, *Recurrence in ergodic theory and combinatorial number theory*, Princeton Univ. Press (to appear).
- [FuK] H. Furstenberg and Y. Katznelson, *An ergodic Szemerédi theorem for commuting transformations*, J. Analyse Math. **34** (1978), 275–291.
- [FuW] H. Furstenberg and B. Weiss, *Topological dynamics and combinatorial number theory*, J. Analyse Math. **34** (1978), 61–85.
- [Gl] S. Glazer, *Ultrafilters and semigroup combinatorics*, J. Combinatorial Theory Ser. A (to appear).

- [GLR] R. L. Graham, K. Leeb and B. L. Rothschild, *Ramsey's theorem for a class of categories*, *Advances in Math.* 8 (1972), 417–433; Errata, 10 (1973), 326–327.
- [GR1] R. L. Graham and B. L. Rothschild, *Ramsey's theorem for  $n$ -parameter sets*, *Trans. Amer. Math. Soc.* 159 (1971), 257–292.
- [GR2] ———, *A short proof of van der Waerden's theorem on arithmetic progressions*, *Proc. Amer. Math. Soc.* 42 (1974), 385–386.
- [GRS] R. L. Graham, B. L. Rothschild and J. H. Spencer, *Ramsey theory*, Wiley, New York, 1980.
- [GS] R. L. Graham and J. H. Spencer, *A general Ramsey product theorem*, *Proc. Amer. Math. Soc.* 73 (1979), 137–139.
- [GrG] R. E. Greenwood and A. M. Gleason, *Combinatorial relations and chromatic graphs*, *Canad. J. Math.* 7 (1955), 1–7.
- [HJ] A. W. Hales and R. I. Jewett, *Regularity and positional games*, *Trans. Amer. Math. Soc.* 106 (1963), 222–229.
- [H] D. Hilbert, *Über die Irreduzibilität ganzer rationaler Functionen mit ganzzahligen Koeffizienten*, *J. Reine Angew. Math.* 110 (1892), 104–129.
- [Hi1] N. Hindman, *Finite sums from sequences within cells of a partition of  $N$* , *J. Combinatorial Theory Ser. A* 17 (1974), 1–11.
- [Hi2] ———, *Ultrafilters and combinatorial number theory*, *Lecture Notes in Math.*, vol. 751 (M. B. Nathanson, ed.), Springer-Verlag, Berlin, 1977, pp. 119–184.
- [Hi3] ———, *Partitions and sums and products—two counterexamples*, *J. Combinatorial Theory Ser. A* 29 (1980), 113–120.
- [I] R. W. Irving, *Generalized Ramsey numbers for small graphs*, *Discrete Math.* 9 (1974), 251–264.
- [La] J. A. Larson, *A short proof of a partition theorem for  $\omega^\omega$* , *Ann. Math. Logic* 6 (1973), 129–145.
- [L] K. Leeb, *Vorlesungen über Pascaltheorie*, Erlangen Univ., 1973.
- [LeR] L. Lesniak and J. A. Roberts, *On Ramsey theory and graphical parameters*, *Pacific J. Math.* 68 (1977), 105–114.
- [M] L. Moser, *Prob.* 170, *Canad. Math. Bull.* 13 (1970), 268.
- [NR0] J. Nešetřil and V. Rödl, *The structure of critical Ramsey graphs*, *Colloq. Internationaux C. N. R. S.* 260 (1978), 307–308.
- [NR1] J. Nešetřil and V. Rödl, *Partition (Ramsey) theory—a survey*, *Colloq. Math. Soc. János Bolyai*, vol. 18, North-Holland, Amsterdam, 1978, pp. 754–792.
- [NR2] ———, *A simple proof of the Galvin-Ramsey property of the class of all finite graphs and a dimension of a graph*, *Discrete Math.* 23 (1978), 49–55.
- [NR3] ———, *Partition theory and its applications*, *Surveys in Combinatorics*, London Math. Soc. Lecture Note Series, no. 38, Cambridge Univ. Press, London, 1979, pp. 96–149.
- [PH] J. Paris and L. Harrington, *A mathematical incompleteness in Peano Arithmetic*, *Handbook of Mathematical Logic* (J. Barwise, ed.), North-Holland, Amsterdam, 1977, pp. 1133–1142.
- [Pa] T. Parsons, *Ramsey graph theory*, *Selected Topics in Graph Theory* (L. W. Beineke and R. J. Wilson, eds.), Academic Press, London, 1978, pp. 361–384.
- [Ra1] R. Rado, *Verallgemeinerung eines Satzes von van der Waerden mit Anwendungen auf ein Problem der Zahlentheorie*, Sonderausgabe aus den Sitzungsberichten der Preuss. Akad. der Wiss. Phys.-Math. Klasse 17 (1933), 1–10.

- [Ra2] —, *Studien zur Kombinatorik*, Math. Z. 36 (1933), 424–480.
- [Ra3] —, *Some recent results in combinatorial analysis*, Congrès International des Mathématiciens, Oslo, 1936.
- [R] F. P. Ramsey, *On a problem of formal logic*, Proc. London Math. Soc. (2) 30 (1930), 264–285.
- [RW] D. K. Ray-Chaudhuri and R. M. Wilson, *The existence of resolvable block designs*, A Survey of Combinatorial Theory (J. N. Srivastava, ed.), North-Holland, Amsterdam, 1973, 361–376.
- [Ro] K. F. Roth, *On certain sets of integers*, J. London Math. Soc. 28 (1953), 104–109.
- \* [Ry] H. J. Ryser, *Combinatorial mathematics*, Carus Math. Mono., no. 14, Math. Assoc. Amer., New York, 1963.
- [Sa] J. Sanders, *A generalization of Schur's Theorem*, Dissertation, Yale University, 1969.
- [Sc1] I. Schur, *Über die Kongruenz  $x^m + y^m \equiv z^m \pmod{p}$* , Jber. Deutsche Math.-Verein. 25 (1916), 114–116.
- [Sc2] —, *Gesammelte Abhandlungen*, Springer-Verlag, Berlin, 1973.
- [So] R. Solovay, personal communication.
- [S] J. H. Spencer, *Ramsey's theorem for spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. 249 (1979), 363–371.
- [Sz1] E. Szemerédi, *On sets of integers containing no four elements in arithmetic progression*, Acta. Math. Acad. Sci. Hungar. 20 (1969), 89–104.
- [Sz2] —, *On sets of integers containing no  $k$  elements in arithmetic progression*, Acta. Arith. 27 (1975), 199–245.
- [Ta] A. Taylor, *Bounds for the disjoint unions theorem* (to appear).
- [V1] B. L. van der Waerden, *Beweis einer Baudetschen Vermutung*, Nieuw Arch. Wisk. 15 (1927), 212–216.
- \* [V2] B. L. van der Waerden, *How the proof of Baudet's conjecture was found*, Studies in Pure Mathematics (L. Mirsky, ed.), Academic Press, London, 1971, pp. 251–260.
- [W] N. H. Williams, *Combinatorial set theory*, Studies in Logic, vol. 91, North-Holland, Amsterdam, 1977.

*Литература, имеющаяся на русском языке*

- [ES] Эрдеш П., Спенсер Дж. Вероятностные методы в комбинаторике. — М.: Мир, 1976.
- [Ry] Райзер Г. Комбинаторная математика. — М., Мир, 1966.
- [V2] Ван дер Варден Б. Л. Как было найдено доказательство гипотезы Баудета (см. дополнение I настоящей книги).

*Литература, добавленная при переводе*

- [D] Deuben W. On van der Waerden's theorem on arithmetic progression. J. Comb. Th., (A), 32, 1982, 115–118.
- [FKO] Furstenberg H., Katznelson J., Orstein D. The ergodic theoretical proof of Szemerédi's theorem. Bull. of the AMS, 7, 1982, N3, 527–552.
- [NR4] Nešetřil J., Rödl V. Another proof of the Folkman — Rado — Sanders theorem. J. Comb. Th., (A), 34, 1983, 108–109.
- [FRS] Faudree R. J., Rousseau C. C., Schelp R. H. All triangle-graph Ramsey numbers for connected graphs of order six. J. of Graph Th., 4, 1980, 293–300.
- [AC] Abbott H. C., Cin-A. Remarks on a paper of Hirschfeld concerning Ramsey numbers, Discrete Math., 39, 1982, N3, 327–328.
- [KR] Kettoda S. Y., Roberts J. D. Some results on Ramsey numbers using sumfree sets. Discrete Math., 40, 1982, N1, 123–124.

# КАК БЫЛО НАЙДЕНО ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ГИПОТЕЗЫ БАУДЕТА<sup>1)</sup>

Б. Л. ван дер Варден

Психология творчества в математике — это интересный, но трудный предмет. Здесь классическими книгами считаются:

Адамар Ж. Исследование психологии процесса изобретения в области математики. Пер. с франц. — М.: Советское радио, 1970.

Пойа Д. Как решать задачу. Пер. с англ. — М.: Учпедгиз, 1961.

Пойа Д. Математика и правдоподобные рассуждения. Пер. с англ. — М.: Наука, 1975.

В своей небольшой брошюре «Einfall und Ueberlegung» (2nd ed., Basel, 1968) я предпринял попытку синтеза точек зрения Адамара и Пойа. Настоящая работа в каком-то смысле представляет собой переработку 2-й части этой брошюры.

Однажды — это было в 1926 г. — я за ленчем рассказал Эмилю Артину и Отто Шрееру о гипотезе голландского математика Баудета:

*Если последовательность целых  $1, 2, 3, \dots$  разделена на два класса, то хотя бы один из классов содержит арифметическую прогрессию из  $l$  членов  $a, a+b, \dots, a+(l-1)b$  вне зависимости от величины этой заданной длины  $l$ .*

После ленча мы отправились к Артину (на кафедру математики Гамбургского университета) и попытались с ходу найти доказательство. Начертили на доске несколько диаграмм. Состояние, в котором мы пребывали, немцы называют «Einfälle»: каждого из нас обуревали внезапно нахлынувшие идеи. Эти новые идеи по несколько раз меняли направление дискуссии, пока наконец одна из них не привела к решению.

Одна из основных трудностей в психологии творчества состоит в том, что большинство математиков, публикуя свои результаты, сопровождают их сжатыми доказательствами и не

---

<sup>1)</sup> Van der Waerden B. L. How the Proof of Baudet's Conjecture was Found. — В кн. Studies in Pure Mathematics/Ed. L. Mirsky. Academic Press, 1971, p. 251—260. (Настоящая работа в большей части представляет собой перевод статьи «Wie der Beweis der Vermutung von Baudet gefunden wurde», Abh. Math.Sem. Univ. Hamburg, vol. 28. Печатается с разрешения издателей оригинала.)

рассказывают, как они пришли к этим результатам. Во многих случаях они даже не помнят своих исходных идей. Сверх того, трудно излагать наши расплывчатые идеи и практические прикидки таким образом, чтобы другие могли понять их. Я, например, привык выражаться краткими намеками, которые один и могу понимать. Излагая свои мысли другим, нам приходится делать их более отчетливыми и, таким образом, менять их природу.

В нашем случае с обсуждением гипотезы Баудета ситуация оказалась более благоприятной для психологического анализа. Все формируемые в наших умах соображения тотчас высказывались и пояснялись небольшими схемками на доске. Мы представляли целые 1, 2, 3, ... в двух классах вертикальными черточками на двух параллельных прямых. Все то, что делаешь ясным и наглядным, много легче сохранять и воспроизводить, нежели просто мысль. Поэтому дискуссия между Артином, Шреером и мной представляет уникальную возможность для психологического анализа процесса математического мышления.

С самого начала было ясно, что случай  $l = 2$  тривиален. Даже нет нужды рассматривать бесконечную последовательность целых; достаточно рассмотреть первые три: 1, 2, 3. Если они разделены на два класса, то один из них содержит пару чисел (в арифметической прогрессии).

Следующий случай, рассмотренный нами, был  $l = 3$ . Здесь также нет необходимости рассматривать все целые: достаточно взять целые от 1 до 9. Числа от 1 до 8 многими разными способами можно разбить на два класса так, чтобы ни один из классов не содержал арифметической прогрессии из 3-х членов, например так:

1 2      5 6      — в первом классе,  
3 4      7 8 — во втором классе.

Однако в каждом из таких случаев число 9 добавить уже нельзя. Если мы поместим его в первый класс, то получим прогрессию 1 5 9, а если поместим во второй, получим прогрессию 7 8 9. И точно так же со всеми остальными возможными случаями. Я уже заметил это днем ранее.

Далее Шреер спросил: «Если гипотеза Баудета верна для всех целых и определенного значения  $l$ , то всегда ли можно найти целое  $N(l)$ , такое, что эта же гипотеза выполняется уже для сегмента 1, 2, 3, ...,  $N(l)$  в том смысле, что каждая разбивка этого сегмента на два класса приводит к наличию арифметической прогрессии длины  $l$  в одном из этих классов?»

Шреер сам и ответил на свой вопрос. Да, если гипотеза Баудета выполняется при фиксированном  $l$ , то можно найти  $N(l)$ , такое, что гипотеза выполняется уже для сегмента 1, 2, 3, ...

...,  $N(l)$ . При доказательстве был применен хорошо известный из теории множеств «диагональный процесс». Само рассуждение проводилось так:

Если такого целого нет, то для каждого  $N$  имелась бы разбивка  $D_N$  множества чисел от 1 до  $N$  на 2 класса, при которой ни один класс не содержал бы арифметической прогрессии длины  $l$ , что дало бы бесконечную последовательность  $D_1, D_2, \dots$  таких разбивок. При каждой из этих разбивок в одном из двух классов имеется 1. Поэтому происходит так, что 1 бесконечно много раз входит в какой-то один класс (первый либо второй). И, значит, существует бесконечная подпоследовательность  $D'_1, D'_2, \dots$ , состоящая из всех тех разбивок, при которых 1 наличествует в одном и том же классе, скажем в классе номер  $i_1$  ( $i_1 = 1$  или  $2$ ).

При разбивках  $D'_2, D'_3, \dots$  число 2 принадлежит одному из двух классов. Поэтому, согласно тому же рассуждению, что и для 1, существует бесконечная подпоследовательность  $D''_2, D''_3, \dots$  в которой 2 всегда наличествует только в классе  $i_2$ .

И так далее. Для каждого  $n$  получается подпоследовательность разбивок  $D^{(n)}_n, D^{(n)}_{n+1}, \dots$ , такая, что во всех этих разбивках целые 1, 2, ...,  $n$  всегда наличествуют в одних и тех же классах:

1 в классе  $i_1$ ,  
2 в классе  $i_2$ ,  
...  
 $n$  в классе  $i_n$ .

Далее можно образовать «диагональную разбивку»  $DD$  из всех целых 1, 2, 3, ..., при которой 1 лежит в классе  $i_1$ , 2 — в классе  $i_2$  и т. д. При такой разбивке число  $n$  лежит в том же классе, что и при разбивке  $D^{(n)}_n$ , поэтому такая процедура именуется диагональным процессом.

При разбивке  $DD$  нет арифметической прогрессии длины  $l$ , все члены которой принадлежали бы одному классу. Если бы она существовала, то такая же существовала бы и при разбивке  $D^{(n)}_n$ , т. е. при одной из исходных разбивок. Но мы предполагали истинность гипотезы Баудета для последовательности всех целых 1, 2, 3, ... и этого конкретного значения  $l$ . Таким образом, получили противоречие.

С этого момента мы старались доказать, как мы говорили, «сильную гипотезу» для конечного сегмента от 1 до  $N(l)$ , т. е. пытались отыскать число  $N(l)$ , обладающее означенным свойством. Для  $l=2$  и  $l=3$  такие числа были уже найдены:  $N(2)=3$ ,  $N(3)=9$ . Итак, мы старались перейти от  $l-1$  к  $l$ . Для такого индуктивного рассуждения замена изначальной гипотезы более сильной дает определенные преимущества, как

правильно заметил Артин. Если можно предполагать для  $l-1$  существование конечной границы  $N(l-1)$ , то имеется больше шансов найти доказательство для следующего числа  $l$ .

Далее Артин заметил: если сильная гипотеза верна для двух классов и всех значений, то она также должна быть верна для произвольного числа классов, скажем для  $k$  классов. Для доказательства этого утверждения он, во-первых, предположил, что  $k=4$ . Четыре класса могут быть сгруппированы в 2 и 2. Это дает первичную разбивку целых на два больших класса, в которой каждый большой класс состоит из двух меньших классов. В одном из таких больших классов существует арифметическая прогрессия из  $N(l)$  членов. Члены этой прогрессии можно занумеровать от 1 до  $N(l)$ . Эти числа в свою очередь разделены на два меньших класса, и поэтому в одном из меньших классов найдется арифметическая прогрессия из  $l$  членов. Таким образом, если сильная гипотеза верна для двух классов, то она также верна и для четырех классов. Точно таким же рассуждением устанавливается, что это имеет место для 8 классов и т. д., а стало быть, и для любого числа классов вида  $k=2^n$ . Но если это выполняется для  $k=2^n$ , то это также выполняется и для каждого  $k \leq 2^n$ , поскольку всегда можно добавить несколько пустых классов. Значит, если гипотеза Баудета верна для двух классов, то она также верна (даже в сильной форме) и для произвольного числа классов.

Теперь мы старались доказать «сильную гипотезу» уже для произвольных  $k$  и  $l$  индуктивным переходом от  $l-1$  к  $l$ . Это значит, что мы пытались найти такую границу  $N=N(l, k)$ , что если целые от 1 до  $N$  разделены на  $k$  классов, то один из классов содержит арифметическую прогрессию длины  $l$ .

Артин рассчитывал — и он оказался прав — на преимущество доказательства по индукции при обобщении от двух до  $k$  классов. Он обосновывал это тем, что мы теперь можем стараться доказывать сильную гипотезу для произвольного фиксированного значения и длины  $l$  при том предположении индукции, что это имеет место для всех  $k$  при длине  $l-1$ . Это значило, что с самого начала мы обладали очень сильным предположением индукции, что дает определенное преимущество.

Следуя этой линии, намеченной Артином, мы теперь уже старались доказать гипотезу Баудета для двух классов и прогрессий длины  $l$ , предполагая выполнимость сильной гипотезы при всех  $k$  для прогрессий длины  $l-1$ .

Далее Артин высказал очень хорошую мысль: если целые  $1, 2, \dots$  разделены на два класса, то блоки из трех последовательных целых автоматически разбиваются на  $2^3=8$  классов. Каждое из трех чисел внутри блока может лежать в первом или втором классе, и это дает 8 возможностей для всего блока.



Теперь блоки из трех последовательных целых можно занумеровать: блок номер  $n$  состоит из целых  $n$ ,  $n+1$ ,  $n+2$ . Если эти блоки разбиваются на 8 классов, то их начальные числа  $n$  также разбиваются на 8 классов, и к этому разбиению мы можем применить предположение индукции. Таким образом, получаем следующий результат: из достаточно большого количества последовательных блоков можно выделить арифметическую прогрессию из  $l-1$  блоков, лежащих в одном классе. Схема распределения целых по двум классам в первом блоке будет точно повторяться и в остальных  $l-2$  блоках.

То же самое имеет место и для блоков произвольной длины  $m$ , состоящих из последовательных чисел  $n$ ,  $n+1$ , ...,  $n+m-1$ . Число классов для этих блоков есть  $2^m$ . Снова можно



Рис. 1.

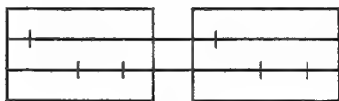


Рис. 2.

получать арифметические прогрессии из  $l-1$  блоков одного класса с точным повторением схемы первого блока. Кроме того, если блоки достаточно длинные, можно также найти арифметические прогрессии из  $l-1$  целых внутри каждого блока.

В простейшем случае  $l=2$  гипотеза, разумеется, верна при всех  $k$ ; если целые от 1 до  $k+1$  разделены на  $k$  классов, то должны быть два целых в одном из классов. Это и есть «принцип ящиков» Дирихле: если  $l+1$  объектов располагаются по  $k$  ящикам, то один ящик содержит два из них. Очень полезный принцип в теории чисел!

Таким образом, отталкиваясь от очевидного случая  $l=2$ , мы попытались перейти к случаю двух классов и  $l=3$  (хотя этот случай и был уже рассмотрен перебором всех возможностей). Целые в двух классах мы представляли маленькими вертикальными черточками на двух параллельных прямых, как на рис. 1.

Согласно предположению индукции, в данном случае совпадающему с принципом ящиков, среди трех последовательных целых всегда найдутся два в одном классе. Теперь рассмотрим блок из пяти последовательных целых. Среди первых трех имеются два в одном и том же классе: это дает арифметическую прогрессию длины 2. Третий член этой прогрессии также лежит внутри этого блока из 5. Если он в том же классе, в котором и два первых члена, то в этом классе получаем искомую прогрессию длины 3. Стало быть, можно предполагать, что тре-

тый член лежит в другом классе, и внутри каждого блока из 5 имеем схему, как на рис. 1.

Я рисовал такие блоки на доске и думал: имеется  $2^5 = 32$  класса блоков по 5, поэтому среди 33 последовательных блоков должно быть два блока в одном и том же классе. Схема расположения черточек в первом из них (как на рис. 1) в точности повторяется во втором блоке из 5 (рис. 2).

Мы хотели построить прогрессию длины 3. Поэтому я нарисовал еще один блок на том же самом расстоянии от второго, как второй от первого, и отметил те три места в этом блоке, на которых расположены черточки в первых двух блоках (рис. 3).

Третье из этих отмеченных мест представляет целое, которое может быть в первом либо втором классе. Если оно в первом, то имеем в этом классе арифметическую прогрессию  $a a a$

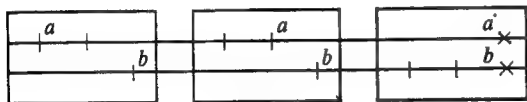


Рис. 3.

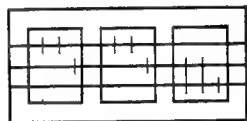


Рис. 4.

(рис. 3). Если же во втором, то имеем в этом классе прогрессию  $b b b$ . Следовательно, во всяком случае внутри блока целых от 1 до  $5 + 32 + 32 = 69$  получаем арифметическую прогрессию из трех членов в одном классе.

Продумав доказательство этого частного случая  $k = 2$  и  $l = 3$ , я изложил его Артину и Шрееру. Я чувствовал уверенность, что именно такое доказательство должно работать и в общем случае. Они не разделили этой уверенности, и я перешел к рассмотрению доказательства для следующего случая:  $k = 3$ ,  $l = 3$ .

Вместо блоков из  $3 + 2 = 5$  я теперь рассматривал блоки из  $4 + 3 = 7$  последовательных целых. Поскольку первые четыре числа такого блока распределяются по трем классам, то два из них должны принадлежать одному и тому же классу. Третий член этой арифметической прогрессии, начинающейся с указанных двух членов, принадлежит тому же самому блоку из 7. Если этот третий член в том же классе, то получаем прогрессию длины 3 в этом классе. Поэтому можно предполагать, что третий член лежит в другом классе. Таким образом, в каждом блоке из 7 получаем схему, подобную схеме первого маленького блока на рис. 4.

Блоки по 7 элементов разбиваются на  $3^7$  классов. Поэтому среди  $3^7 + 1$  последовательных блоков по 7 найдутся два,

принадлежащих одному и тому же классу. В первом блоке имеется три целых в арифметической прогрессии, два из которых принадлежат одному классу; та же схема повторяется и во втором блоке. Если второй блок сдвигается на то же самое расстояние, то получается три блока, образующих арифметическую прогрессию блоков, как показано на рис. 4.

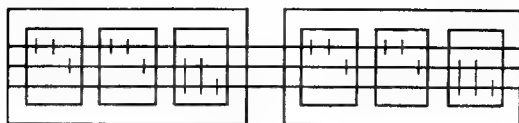


Рис. 5.

В третьем блоке я отметил три места, соответствующие трем черточкам в первом и втором блоках, и рассмотрел возможности для третьего из этих мест. Если это число попадает в первый или второй класс, получаем арифметическую прогрессию длины 3 в том же классе (тем же рассуждением, что и раньше), но теперь эта третья черточка может оказаться и в третьем классе. Таким образом, получим схему, изображенную на рис. 4.

В каждом большом блоке из  $3^7 + 3^7 + 7 = h$  последовательных целых имеем такую схему. Теперь большие блоки из  $h$  це-

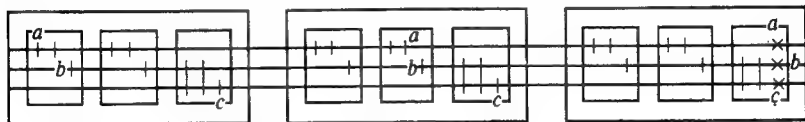


Рис. 6.

лых разделяются на  $3^h$  классов. Поэтому среди  $3^h + 1$  последовательных больших блоков найдутся два, принадлежащих одному и тому же классу. Изображая маленькие блоки внутри больших, я получил рис. 5.

Теперь, отодвигая второй большой блок на то же самое расстояние и рассматривая третье место в третьем маленьком блоке третьего большого блока, я показал, что черточку на этом месте никуда нельзя поставить. Если она лежит в первом классе, то имеется прогрессия  $aaa$  в первом классе, если она во втором классе, то имеется прогрессия  $bbb$  в этом классе, а если в третьем классе, то прогрессия  $ccc$  в этом классе (рис. 6).

После этого все мы согласились, что подобное доказательство может пройти для произвольного  $k$ . Но теперь Артину и Шрееру захотелось посмотреть случай  $l = 4$ .

Как и ранее, я сначала рассмотрел случай двух классов. Для этого случая я уже доказал, что среди достаточно большого количества, скажем  $n$ , последовательных целых найдется прогрессия из трех членов в одном классе. Можно предполагать  $n$  нечетным. Расстояние между первым и последним членами этой прогрессии не превосходит  $n - 1$ ; следовательно, расстояние между двумя последовательными ее членами не более чем  $(n - 1)/2$ . Теперь рассмотрим четвертый ее член. Все эти четыре члена лежат внутри блока из  $g = n + (n - 1)/2$  последовательных целых. Если четвертый член принадлежит тому же классу, что и три первых, то цель достигнута. Предположим, что он лежит в другом классе; тогда имеем схему, как на рис. 7.

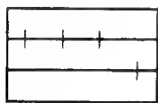


Рис. 7.

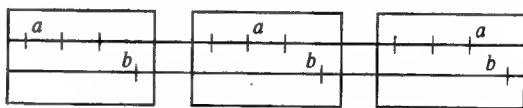


Рис. 8.

В каждом блоке из  $g$  последовательных целых должна наличествовать такая схема. Теперь эти блоки по  $g$  элементов подразделяются на  $2^g$  классов. Поэтому среди достаточно многих, скажем  $N(3, 2^g)$ , блоков длины  $g$  найдутся три блока в арифметической прогрессии, принадлежащих одному классу. Схема первого блока в точности повторяется во втором и третьем блоках (рис. 8).

Добавляя четвертый блок к этой прогрессии, я легко получил прогрессии  $aaaa$  в первом или  $bbbb$  во втором классе.

Теперь каждому из нас стало ясно, что индуктивный переход от  $l - 1$  к  $l$  проходит для произвольного  $l$  при любом фиксированном значении  $k$ . Следовательно, если сильная гипотеза Баудета верна для длины  $l - 1$  при всех  $k$ , то она также верна для  $l$  и любого  $k$ . А так как она верна при  $l = 2$ , то это влечет ее истинность и в общем случае.

При анализе изложенного четко выделяется череда неожиданных соображений, придававших каждый раз нашей дискуссии новое направление.

1. Первой была шрееровская идея редукции к конечному сегменту от 1 до  $N$ ; она явилась основой всего доказательства.

2. Вторая идея: постараться провести индукцию по  $l$ . Это было вполне естественно, поскольку случай  $l = 2$  очевиден, а случай  $l = 3$  получался перечислением всех возможных вариантов.

3. Артин доказал: если сильная гипотеза верна для двух классов, то она также верна и для четырех классов. В его

доказательстве прослеживалась и иная идея, а именно: если эта гипотеза верна для сегмента из всех целых от 1 до  $N$ , то она также верна и для любой арифметической прогрессии длины  $N$ :  $a, a + b, \dots, a + (N - 1)b$ , поскольку члены этой прогрессии могут быть занумерованы целыми от 1 до  $N$ . Это тоже одна из ключевых идей доказательства.

4. Далее Артин сказал: в индукции всегда удобно иметь с самого начала сильное индуктивное предположение. Поэтому давайте начнем с того предположения, что эта гипотеза выполняется для прогрессий длины  $l - 1$  и всех  $k$ , и постараемся доказать ее для прогрессий длины  $l$  и одного значения  $k$ , скажем  $k = 2$ . Тем самым был выработан план доказательства.

5. Следующая мысль, которая также пришла от Артина, была решающей. Он сказал, что мы можем применять предположение индукции не только к отдельным числам, но и к блокам, ибо они тоже делятся на классы. Таким образом, мы убедились, что и блоки целиком повторяются по  $l - 1$  раз.

6. После этого было вполне естественно рассматривать прогрессию из  $l - 1$  блоков и  $l - 1$  целых внутри этих блоков и стараться продлить эти прогрессии длины  $l - 1$  до прогрессий длины  $l$ . Простейший нетривиальный случай был  $l = 3$ , и я естественно был подведен к рассмотрению схем типа рис. 2.

7. Эта схема не содержит прогрессии длины 3 в одном классе. Поэтому необходимо было продлить прогрессию длины 2, наличествующую во втором классе на рис. 2, до прогрессии длины 3. Я, стало быть, расширил схему рис. 2, пририсовав третий блок (рис. 3), и рассмотрел третий член прогрессии  $b b b$ . Как только внимание сосредоточилось на этом члене, стало ясно, что он не может избежать образования арифметической прогрессии длины 3 в первом либо втором классе.

Эта последняя идея сопровождалась чувством полной уверенности. Я нисколько не сомневался в том, что этот метод доказательства будет работать для произвольных  $k$  и  $l$ . Я не могу объяснить это чувство, могу лишь сказать, что математиков часто посещает такое откровение. Когда основная идея приходит в голову, мы ощущаем уже наличие всего искомого доказательства, остается лишь проработать его в деталях.

Более того, берусь в известной мере объяснить, почему Артин и Шреер не чувствовали такой уверенности. Они видели только результат: присутствие прогрессии  $a a a$  в первом классе или  $b b b$  во втором классе. Я же нашел метод для выделения таких прогрессий и был уверен, что этот метод будет работать и в остальных случаях так же хорошо.

Это подобно сбору яблок с дерева. Если срываешь яблоко с дерева и видишь другое, висящее чуть выше, может статься,

что знаешь: чуть больше усилий — и оно тоже твое. Человек, стоящий рядом, лишь видит, как я сорвал первое, и сомневается, смогу ли сорвать еще; я же не только владею первым, но чувствую само движение, которым сорву другое.

Ощущение, что метод доказательства может быть перенесен и на другие случаи, иногда обманчиво. Часто в иных случаях возникают дополнительные сложности. И все-таки чувство подобного рода весьма полезно в математических исследованиях.

Поиск доказательства гипотезы Баудета — хороший пример совместной работы. Каждый из нас внес существенный вклад. После этой дискуссии с Артином и Шреером я проработал детали доказательства и опубликовал его в журнале *Nieuw Archief voor Wiskunde* 15, 212(1927). (Интересные приложения и обобщения этой теоремы, доказанной в моей работе, были даны Ричардом Радо<sup>1)</sup>.)

А. Я. Хинчин включил эту теорему в свои «Три жемчужины теории чисел» (1948) и опубликовал доказательство М. А. Лукомской, которое по существу такое же, как и у меня, с той лишь разницей, что в ее доказательстве требуется, чтобы блоки не перекрывались.

---

<sup>1)</sup> R. Rado: Studien zur Kombinatorik, Ph. D-Thesis, Berlin, 1931, Math. Zeitschr., 36, p. 424. Verallgemeinerung eines Satzes von van der Waerden, Sitzungsber. preuss. Akad., Berlin, 1933, p. 589. Note on Combinatorial Analysis, Proc. London Math. Soc., (2) 48, p. 122.

# ПРИНЦИП ПОЛНОГО РАЗМЕЩЕНИЯ

Б. С. Стечкин

Вопрос о закономерностях существования подструктуры с заданными свойствами у произвольной структуры из определенного класса — это типичный для комбинаторики вопрос о взаимодействиях единого и разделенного. Иногда удается вскрывать такие закономерности для конкретных классов структур; наиболее общие из них представлены теоремами Рамсея, ван дер Вардена, Шура и др. Основным первичным фактом такого типа, равно как и основным инструментом разрешения подобных вопросов, служит принцип Дирихле.

Здесь мы изложим еще один общий принцип — принцип полного размещения. Этот принцип возник как средство для решения вполне конкретной инженерно-технической задачи, связанной с управлением памятью ЭВМ; подробнее о ней будет сказано ниже. Сначала принцип полного размещения будет изложен и рассмотрен в модельной ситуации — в терминах разбиений чисел; в частности, в этих терминах будут вскрыты и иные экстремальные факты, пригодные для прямого инженерного использования. Далее будет указана связь этого нового принципа с уже имеющимися фактами такого рода — прежде всего с теоремой Рамсея. Наконец, посредством принципа полного размещения асимптотически точно будет решен класс экстремальных задач о локальных свойствах графов. В частности, последний результат указывает на наличие прямой связи между техническими вопросами управления памятью ЭВМ и вычислением хроматических чисел графов.

**Определения.** Разбиение натурального  $n$  есть представление его в виде неупорядоченной суммы натуральных слагаемых  $n = n_1 + \dots + n_r$ . Эти слагаемые  $n_i$  называются *частями* разбиения  $(n_1 \dots n_r) \vdash n$  (числа  $n$ ), а их число  $r$  — *рангом* этого разбиения.

Пусть  $P$  — множество всех разбиений всех натуральных чисел,  $P_r$  — множество всех разбиений ранга  $r$ ,  $P(n)$  — множество всех разбиений числа  $n$  и  $P_r(n) = P_r \cap P(n)$ . Запись  $(n_1^{a_1} \dots n_r^{a_r})$  обозначает разбиение  $\underbrace{(n_1 \dots n_1)}_{a_1} \dots \underbrace{(n_r \dots n_r)}_{a_r}$ , а запись  $[r]$  —

множество  $\{1, \dots, r\}$ .

Разбиения чисел позволяют формулировать принципы размещения в достаточно общей форме.

**Принцип Дирихле.** Для натуральных  $k, r$  пусть  $n(k, r)$  — то наименьшее  $n$ , при котором  $\forall (n_1 \dots n_r) \vdash n \exists i \in [r]: n_i \geq k$ . Тогда  $n(k, r) = rk - r + 1$ .

**Теорема Рамсея** (частный случай). Для натуральных  $k_1, \dots, k_r$  пусть  $n(k_1 \dots k_r)$  — то наименьшее  $n$ , при котором  $\forall (n_1 \dots n_r) \vdash n \exists i \in [r]: n_i \geq k_i$ . Тогда  $n(k_1 \dots k_r) = \sum_{i=1}^r k_i - r + 1$ .

Смысл этих утверждений как логических принципов размещения совершенно прозрачен: принцип Дирихле обеспечивает полное размещение объекта объема  $k$  в любое разбиение  $n \geq n(k, r)$  на  $r$  частей, т. е. в любое разбиение из множества  $P_r(n)$ , в то время как теорема Рамсея гарантирует размещение лишь одной части разбиения  $(k_1 \dots k_r)$  в любое разбиение из  $P_r(n)$ , если  $n \geq n(k_1 \dots k_r)$ . В частности, из принципа Дирихле при  $k = 2, r = n$  сразу следует широко известный

**Принцип ящиков.** Если  $n+1$  предметов размещаемы по  $n$  ящикам, то найдется ящик с по крайней мере двумя предметами.

Естественно поинтересоваться принципом, который гарантировал бы полное размещение фиксированного разбиения в любое разбиение из  $P_r(n)$ . Для этого прежде всего нужно более четко определить само понятие размещения.

Будем говорить, что разбиение  $(k_1 \dots k_t) \vdash k$  вложено в разбиение  $(n_1 \dots n_r) \vdash n$  (это обозначается  $(k_1 \dots k_t) \subset \subset (n_1 \dots n_r)$ ), если существует  $\varphi: [t] \rightarrow [r]$ , при котором  $\sum_{j \in \varphi^{-1}(i)} k_j \leq n_i \forall i \in [r]$ , где  $\varphi^{-1}$  — полный прообраз элемента  $i$ ; иными словами, если части  $k_i$  разбиения  $(k_1 \dots k_t)$  можно так сгруппировать в  $r$  групп (каждая часть  $k_i$  входит ровно в одну группу, причем пустые группы допускаются), что по сложению всех частей  $k_i$  каждой из этих групп получится  $r$  чисел  $p_1, \dots, p_r$ , таких, что  $p_i \leq n_i, i = 1, \dots, r$ .

Далее некоторые утверждения приводятся в виде упражнений, а открытые вопросы — в виде задач.

**Упражнение 1.** Проверьте, что бинарное отношение вложимости разбиений является отношением частичного порядка.

**Задача 1.** Вычислить мёбиус-функцию частично упорядоченного множества  $(P, \subset)$ .

Понятие вложимости разбиений позволяет сформулировать



**Принцип полного размещения.** Для натуральных  $r, k_1 \geq \dots \geq k_t$  пусть  $n(k_1 \dots k_t; r)$  — то наименьшее  $n$ , при котором  $\forall (n_1 \dots n_r) \vdash n \quad (k_1 \dots k_t) \subset (n_1 \dots n_r)$ . Тогда

$$n(k_1 \dots k_t; r) = \max_{1 \leq i \leq t} \left\{ \sum_{j=1}^i k_j + (k_i - 1)(r - 1) \right\}. \quad (1)$$

**Доказательство.** Обозначим правую часть (1) через  $f(k_1 \dots k_t; r)$ . Так как из вложимости  $(k_1 \dots k_t) \subset (n - (r - 1)(k_t - 1), (k_t - 1)^{(r-1)})$  следует, что  $n - (r - 1)(k_t - 1) \geq k_1 + \dots + k_t$ , то  $n(k_1 \dots k_t; r) \geq f(k_1 \dots k_t; r)$ , и, значит, достаточно доказать обратное неравенство. Отметим, что

$$f(k_1 \dots k_t; r) \geq k_1 + f(k_2 \dots k_t; r). \quad (*)$$

Действительно, если  $i$  — индекс, максимизирующий функцию  $f(k_2 \dots k_t; r)$ , то  $f(k_1 \dots k_t; r) \geq \sum_{j=1}^i k_j + (k_i - 1) \times (r - 1) = k_1 + \sum_{j=2}^i k_j + (k_i - 1)(r - 1) = k_1 + f(k_2 \dots k_t; r)$ .

Проведем индукцию по  $t$ . При  $t = 1$  получаем принцип Дирихле. Для индуктивного перехода от  $t - 1$  к  $t$  достаточно показать, что если  $n = f(k_1 \dots k_t; r)$ , то полная размещаемость осуществима. Рассмотрим произвольное разбиение  $(n_1 \dots n_r) \vdash n$  вида  $n_1 \geq \dots \geq n_r$ . В нем всегда  $n_1 \geq k_1$ , так как  $f(k_1 \dots k_t; r) \geq k_1 + (r - 1)(k_1 - 1)$ , поэтому вложение

$$(k_2 \dots k_t) \subset (n_1 - k_1, n_2, \dots, n_r) \quad (**)$$

влечет вложение  $(k_1 \dots k_t) \subset (n_1 \dots n_r)$ . В свою очередь (\*\*) следует из (\*) и предположения индукции

$$n_1 - k_1 + n_2 + \dots + n_r = n - k_1 = f(k_1 \dots k_t; r) - k_1 \geq f(k_2 \dots k_t; r).$$

Если при этом  $n_1 = k_1$ , то надлежит еще воспользоваться монотонностью  $f$  по  $r$ .  $\square$

**Следствие.** Если для натуральных  $k_1 \geq \dots \geq k_t, n \geq k_1 - 1$   $(k_1 \dots k_t)$  через  $r(k_1 \dots k_t; n)$  обозначено то наибольшее  $r$ , при котором в каждое разбиение числа  $n$  на  $r$  частей вложимо разбиение  $(k_1 \dots k_t)$ , то

$$r(k_1 \dots k_t; n) = \begin{cases} n, & k_1 = 1, \\ \min_{i: k_i > 1} \left[ \frac{n - \sum_{j=1}^i k_j}{k_i - 1} \right] + 1, & k_1 > 1. \end{cases}$$

Действительно, искомое  $r$ , согласно принципу полного размещения, есть наибольший целый корень неравенства  $n \geq n(k_1 \dots k_t; r)$ .

Опишем теперь исходную инженерную постановку. При работе вычислительных систем наблюдается явление фрагментации памяти ЭВМ, т. е. ситуация, при которой вся память разбита на занятые и свободные куски (фрагменты); в то же время нужно разместить очередную порцию информации в эти фрагменты, причем информация эта может быть разделена на не более чем определенное количество блоков определенного объема (например, из-за одноадресности массивов). Естественен вопрос об определении возможности размещения требуемой информации в данную систему фрагментов. Явление фрагментации памяти требует также быстрых алгоритмов размещения системы запросов информации объемов  $k_1, \dots, k_t$  в систему фрагментов свободной памяти объемов  $n_1, \dots, n_r$ . Из принципа полного размещения явствует, что если  $\sum_{i=1}^t n_i \geq n(k_1 \dots k_t; r)$ , то разместить запросы можно, причем быстрыми алгоритмами «большее в большее», «большее в наименьшее возможное» или же «большее в любое подходящее».

Принцип полного размещения можно рассматривать и просто как экстремальный результат о разбиениях. Вычисление иных экстремальных характеристик о разбиениях также оказывается полезным.

**Упражнение 2.** Докажите следующие утверждения.

а) Пусть  $n_a(k, t, r)$  — наибольшее  $n$ , при котором никакое разбиение числа  $k$  на  $t$  частей не вложимо ни в какое разбиение числа  $n$  на  $r$  частей. Тогда  $n_a(k, t, r) = \max\{k-1, k-1-t+r\}$ .

б) Если  $n_b(k, t, r)$  — наименьшее  $n$ , при котором  $\forall p \in P_r(n) \forall q \in P_t(k) p \not\subset q$ , то  $n_b(k, t, r) = \min\{k+1, k+1-t+r\}$ .

в) Пусть  $n_c(q_1 \dots q_t; r)$  — наименьшее  $n$ , при котором никакое разбиение  $n$  на  $r$  частей не вложимо в разбиение  $(q_1 \dots q_t)$ ,  $q_1 \geq \dots \geq q_t$ . Тогда

$$n_c(q_1 \dots q_t; r) = 1 + \sum_{i=1}^{\min\{r, t\}} q_i.$$

г) Если  $q \in P_t(k)$  и  $n_d(q; r)$  — наибольшее  $n$ , при котором разбиение  $q$  не вложимо ни в какое разбиение числа  $n$  на  $r$  частей, то  $n_d(q; r) = \max\{k-1, k-1-t+r\}$ .

д) Если  $n_e(k, t, r)$  — наименьшее  $n$ , при котором  $\forall p \in P_r(n) \forall q \in P_t(k) p \supset q$ , то  $n_e(k, t, r) = \max\{k, r(k-t)+1\}$ .

е) Если  $n_f(k, t, r)$  — наибольшее  $n$ , при котором  $\forall p \in P_r(n) \forall q \in P_t(k) p \subset q$ , то  $n_f(k, t, r) = \min\left\{k, \left\lceil \frac{k}{t} \right\rceil [t+r-1] \right\}$ .

**Задача 2.** Для данных  $n_1, \dots, n_r, t$  вычислить  $k(n_1 \dots n_r; t)$  — наибольшее  $k$ , при котором  $\forall (k_1 \dots k_t) \vdash k (n_1 \dots n_r) \supset (k_1 \dots k_t)$ .

Вычислению аналогичной характеристики для «рамсеевской структуры» посвящено

**Упражнение 3.** Для данных  $n_1, \dots, n_r$  вычислить то наибольшее  $k$ , при котором  $\forall (k_1 \dots k_r) \vdash k \exists i \in [r] n_i \geq k_i$ .

Подобно своему частному случаю — принципу Дирихле, принцип полного размещения допускает реализации в терминах урновых схем и случайных размещений.

**Упражнение 4.** Докажите, что при любом размещении  $n$  частиц по  $r$  ячейкам найдется  $t$  различных групп частиц (по  $[(n+r-1)/(t+r-1)]$  частиц в каждой), целиком лежащих в ячейках.

Изучение свойств функции полного размещения  $n(k_1 \dots k_t; r)$  обеспечивает усиление достаточных условий вложимости разбиений.

**Упражнение 5.** Докажите следующие равенства и утверждения:

$$n(lk_1, \dots, lk_t; r) = ln(k_1 \dots k_t; r) + (r-1)(l-1),$$

$$n((k_1^l \dots k_t^l); rl-l+1) = ln(k_1 \dots k_t; r).$$

(а) Разбиение  $(k_1 \dots k_t)$  вложимо в любое разбиение из  $P_r(n)$  тогда и только тогда, когда разбиение  $(lk_1, \dots, lk_t)$  вложимо в любое разбиение из  $P_r(nl + (r-1)(l-1))$ .

(б) Разбиение  $(k_1 \dots k_t)$  вложимо в любое разбиение из  $P_r(n)$  тогда и только тогда, когда разбиение  $(k_1^l \dots k_t^l)$  вложимо в любое разбиение из  $P_{rl-l+1}(nl)$ .

(с) Если разбиение  $(k_1 \dots k_t)$  вложимо в любое разбиение из  $P_r(n)$ , то разбиение  $(k_1^l \dots k_t^l)$  вложимо в любое разбиение из  $P_r(nl + (r-1)(l-1))$ .

(д) Если для натуральных  $r, t, n_1, \dots, n_r, k_1 \geq \dots \geq k_t$  выполняется неравенство

$$\max_{\substack{1 \leq l \leq t \\ k_l \geq t}} \left\{ \sum_{i=1}^r l \left\lfloor \frac{n_i}{l} \right\rfloor + (r-1)(l-1) \right\} \geq \max_{1 \leq l \leq t} \left\{ \sum_{j=1}^l k_j + (r-1)(k_l-1) \right\},$$

то разбиение  $(k_1 \dots k_t)$  вложимо в разбиение  $(n_1 \dots n_r)$ .

Определим теперь аналогичную экстремальную константу для обычных графов и рассмотрим ее связь с числами Рамсея.

Пусть  $c(k_1 \dots k_t; r)$  — наименьшее  $c$ , при котором в любом  $r$ -раскрашивании полного  $c$ -вершинного графа  $K_c$  найдется  $t$  реберно непересекающихся графов  $K_{k_1}, \dots, K_{k_t}$ , каждый из которых одноцветен.

Будем рассматривать 2-раскрашивания полных графов, используя обозначения  $c(k_1 \dots k_t)$  для  $c(k_1 \dots k_t; 2)$  и  $R(k)$  для  $R(k, k; 2)$ . Взаимосвязь между числами  $c$  и  $R$  иллюстрирует

**Утверждение 1.**  $c(k, 3) = R(k)$ ,  $k = 4, 5, \dots$

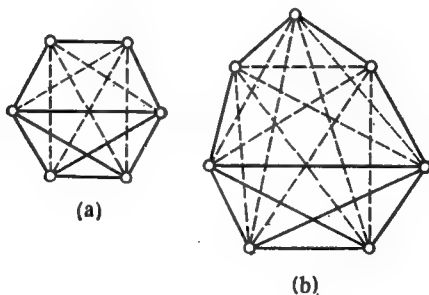
**Доказательство.** Ясно, что если  $k \geq k'$ , то  $c(k, k') \geq R(k)$ ; кроме того, если  $k$  и  $k'$  таковы, что  $R(k) - k + 1 \geq R(k')$ , то  $c(k, k') = R(k)$ . Действительно, положим  $R = R(k)$  и рассмотрим произвольную 2-раскраску  $K_R$ ; эта раскраска с необходимостью содержит одноцветный  $K_k$ , скажем на вершинах множества  $[k]$ . Рассмотрим теперь нашу раскраску на вершинах множества  $[k, R]$ . Так как  $|[k, R]| = R - k + 1 \geq R(k')$ , то в этой раскраске найдется одноцветный  $K_{k'}$  (очевидно, пересекающийся с  $K_k$  не более чем по одной вершине), так что требуемая конфигурация получена.

Ясно, что при  $k' = 3$  используемое неравенство принимает вид  $R(k) \geq k + 5$ , и оно, согласно соотношению (2.1) из гл. 2 основного текста, выполняется при  $k \geq 4$ .  $\square$

**Упражнение 6.** Докажите следующие утверждения.

(а) Если  $n_a$  — наименьшее  $n$ , для которого при любой 2-раскраске ребер  $K_n$  найдутся два монокроматических треугольника, быть может, разных цветов, но без общих ребер, то  $n_a = 7$ .

(б) Если  $n_b$  — наименьшее  $n$ , для которого при любой 2-раскраске ребер  $K_n$  найдутся два монокроматических треугольника одного цвета и без общих ребер, то  $n_b = 8$ . (Указание: используйте раскраски, приведенные на рисунке.)



Опишем теперь один класс экстремальных задач о графах, решения и ответы которых содержат в себе принцип полного размещения в явном виде.

**Задача.** Сколь мало ребер  $t(n; H_k)$  может иметь  $n$ -вершинный граф, у которого на любых  $k$  вершинах найдется  $k$ -вершинный граф, изоморфный *наперед* заданному  $k$ -вершинному графу  $H_k$ ?

Этот класс задач о графах с такими локальными свойствами является подклассом более широкого класса экстремальных задач, именно задач о монотонных свойствах, или, иначе, о запрещенных подграфах.

**Задача о запрещенных подграфах.** Сколь много ребер  $f(n; L)$  может иметь  $n$ -вершинный граф, не содержащий в себе в качестве подграфа ни одного «запрещенного» графа из наперед заданного списка  $L$  таких запрещенных графов?

Включение первого класса задач во второй определяется очевидным равенством

$$m(n; H_k) = \binom{n}{2} - f(n; \{G_k\}_{G_k \not\subseteq \bar{H}_k}).$$

Асимптотическое решение задачи о запрещенных подграфах дает

**Теорема Эрдёша — Шимоновича.**

$$f(n; L) = \left(1 + \frac{1}{1 - \min_{G \in L} \chi(G)}\right) \frac{n^2}{2} + o(n^2).$$

Основной характеристикой, определяющей асимптотику  $f(n; L)$ , оказывается хроматическое число; в классе локальных свойств применением принципа полного размещения коэффициент удастся значительно упростить:

**Теорема.** Пусть непустой граф  $H_k$  состоит из  $t$  компонент связности по  $k_i$  вершин в  $i$ -й компоненте связности, причем  $k_1 \geq k_2 \geq \dots \geq k_t \geq 1$ ,  $k_1 + \dots + k_t = k$ . Тогда

$$m(n; H_k) = n^2 / \left[ 2 \min_{i: k_i > 1} \left[ \frac{\sum_{j=1}^t k_j - 1}{k_i - 1} \right] \right] + o(n^2). \quad (2)$$

**Доказательство.** Введем необходимые обозначения и определения.  $G_n$  — это  $n$ -вершинный граф,  $K_n$  — полный граф на  $n$  вершинах,  $K_{n_1 \dots n_r}$  — полный  $r$ -дольный граф, в котором  $i$ -я доля имеет  $n_i$  вершин;  $\bar{G}_n = K_n - G_n$ , так что если  $n_1 + \dots + n_r = n$ , то  $\bar{K}_{n_1 \dots n_r} = K_n - K_{n_1 \dots n_r} = K_{n_1} + \dots + K_{n_r}$ , т. е.  $n$ -вершинный граф, состоящий из  $r$  непересекающихся полных графов по  $n_i$  вершин в  $i$ -м графе.

Через  $\mu(n; F_k)$  обозначаем максимум числа ребер в  $n$ -вершинном графе, у которого любой  $k$ -вершинный подграф вложим в  $k$ -вершинный граф  $F_k$ . Ясно, что  $m(n; H_k) + \mu(n; \bar{H}_k) = \binom{n}{2}$ , поэтому всюду далее предполагаем, что  $F_k = \bar{H}_k$ . Внешним хро-

матическим числом  $k$ -вершинного графа  $F_k$  называем число  $\bar{\chi}(F_k) = \min_{G_k \not\subset F_k} \chi(G_k)$ .

**Лемма.** Если  $F_k \neq K_k$  и  $F_k$  состоит из  $t$  компонент связности по  $k_i$  вершин в  $i$ -й компоненте связности, причем  $k_1 \geq \dots \geq k_t \geq 1$ ,  $k_1 + \dots + k_t = k$ , то

$$\bar{\chi}(F_k) = \min_{i: k_i > 1} \left[ \frac{\sum_{j=i}^t k_j - 1}{k_i - 1} \right] + 1.$$

*Доказательство леммы.* Действительно, если  $G_k \not\subset F_k$  и  $G_k \subset K_{n_1 \dots n_r}$  где  $(n_1 \dots n_r) \vdash k$ , то  $K_{n_1 \dots n_r} \not\subset F_k$ ; поэтому равенство  $\bar{\chi}(F_k) = r$  эквивалентно тому, что

$$\exists (n_1 \dots n_r) \vdash k \quad K_{n_1 \dots n_r} \not\subset F_k, \quad \forall (n_1 \dots n_{r-1}) \vdash k \quad K_{n_1 \dots n_{r-1}} \subset F_k.$$

Значит, если  $r$  — это то наибольшее целое, при котором  $\forall (n_1 \dots n_r) \vdash k \quad K_{n_1 \dots n_r} \subset F_k$ , то  $\bar{\chi}(F_k) = r + 1$ . В свою очередь

$$K_{n_1 \dots n_r} \subset F_k \Leftrightarrow \bar{K}_{n_1 \dots n_r} \supset \bar{F}_k \quad \text{или} \quad K_{n_1} + \dots + K_{n_r} \supset H_k = \bar{F}_k,$$

а последнее вложение, очевидно, имеет место тогда и только тогда, когда  $(n_1 \dots n_r) \supset (k_1 \dots k_t) \vdash k$ , где  $k_i$  — число вершин графа  $H_k$  в его  $i$ -й компоненте связности. Значит, искомое  $r$  — это в точности  $r(k_1 \dots k_t; k)$  из следствия, согласно которому при учете того, что  $F_k \neq K_k$ , а значит,  $k_1 > 1$ , имеем

$$\begin{aligned} r(k_1 \dots k_t; k) &= \min_{i: k_i > 1} \left[ \frac{k - \sum_{j=1}^i k_j}{k_i - 1} \right] + 1 = \\ &= \min_{i: k_i > 1} \left[ \frac{\sum_{j=i+1}^t k_j}{k_i - 1} \right] + 1 = \min_{i: k_i > 1} \left[ \frac{\sum_{j=i}^t k_j - 1}{k_i - 1} \right]. \quad \square \end{aligned}$$

Теперь доказательство теоремы основывается на последовательном применении определения  $\mu$ , теоремы Эрдёша — Шимонича, определения внешнего хроматического числа и нашей леммы:

$$\begin{aligned} m(n; H_k) &= \binom{n}{2} - \mu(n; F_k) = \binom{n}{2} - f(n; \{G_k\}_{i: k_i \not\subset F_k}) = \\ &= \binom{n}{2} - \left(1 + \frac{1}{1 - \bar{\chi}(F_k)}\right) \frac{n^2}{2} + o(n^2) = \frac{1}{\bar{\chi}(F_k) - 1} \frac{n^2}{2} + o(n^2) = \\ &= n^2 / \left[ 2 \min_{i: k_i > 1} \left[ \frac{\sum_{j=i}^t k_j - 1}{k_i - 1} \right] \right] + o(n^2). \quad \square \end{aligned}$$

**Упражнение 7.** Докажите следующие следствия из теоремы.

(а) Если граф  $H_k$  состоит из  $t$  компонент связности по  $l$  вершин в каждой компоненте и  $(k - lt)$  изолированных вершин, то  $m(n; H_k) = \left(1 / \left(1 + \left[\frac{k - lt}{l - 1}\right]\right)\right) \frac{n^2}{2} + o(n^2)$ .

(б) Если граф  $H_k$  не имеет изолированных вершин, то  $m(n; H_k) = n^2/2 + O(n)$ .

**Задача 3.** Провести оценку остаточного члена в уравнении (2).

Для многих конкретных типов  $H_k$  удается получать и точные решения.

**Упражнение 8.** Докажите следующие утверждения.

(а) Если граф  $F_k$  имеет изолированную вершину, то

$$\mu(n; F_k) = \begin{cases} |F_k|, & F_k \not\supset \mathcal{F}_k, \\ \max \left\{ |F_k|, \left[\frac{n}{2}\right] \right\}, & F_k \supset \mathcal{F}_k, \end{cases}$$

где  $\mathcal{F}_k$  — система из  $\lfloor k/2 \rfloor$  независимых ребер на  $k$  вершинах.

(б) Если  $C_k$  — цикл на  $k$  вершинах, то  $m(n; C_k) = \lfloor n(n - k + 2)/2 \rfloor$ .

(с) Если  $P_k$  — путь на  $k$  вершинах, то  $m(n, P_k) = \lfloor n(n - k + 1)/2 \rfloor$ ,  $n \geq k$ .

(д) Если  $\mathcal{F}_k^*$  — система из  $\lfloor k/2 \rfloor$  по возможности независимых ребер на  $k$  вершинах, то  $m(n; \mathcal{F}_k^*) = \lfloor n(n - k + 1)/2 \rfloor$ .

(е) Если  $n \geq 2p + q$ , то

$$\mu(n; K_{p, p+q}) = \begin{cases} \binom{n}{2}, & p = 1, q = 0, \\ \left[\frac{n^2}{4}\right], & p = 1, q = 1, \\ n - 1, & p = 1, q \geq 2, \\ \max \{p^2, n\}, & p \geq 2, q = 0, \\ 3 \left[\frac{n}{2}\right], & p = 2, q = 1, n = 5, 7, 9, \\ \left[\frac{3n}{2}\right], & p = 2, q = 1, n \neq 5, 7, 9, \\ p^2 + p, & p \geq 3, q = 1, n = 2p + 1, \\ \max \left\{ (p + 1)^2, 3 \left[\frac{n}{2}\right] \right\}, & p \geq 3, q = 1, n \geq 2p + 2, \\ p^2 + pp, & p \geq 2, q \geq 2. \end{cases}$$

(f) Пусть  $m(n, p, q)$  — минимум числа ребер в  $n$ -вершинном графе, у которого среди любых  $p$  вершин найдется  $K_q$ . Дока-

жите, что

$$m(n, p, q) = \min_{p-q \geq r \geq r_1} \sum_{i=0}^{t_r-1} \left\lfloor \frac{n-r+i}{2} \right\rfloor,$$

$$t_r = \left\lfloor \frac{p-r-1}{q-1} \right\rfloor, \quad r_1 = \begin{cases} (p-1)q - n(q-1), & n \leq (q/(q-1))(p-1), \\ (p-1) - (q-1)t_0, & n \geq (q/(q-1))(p-1), \end{cases}$$

и в частности, если  $p \leq 2(q-1)$ , то  $m(n, p, q) = \binom{n-p+q}{2}$  и

$$m(n, p, 3) = \begin{cases} 3(n-p+1), & n \leq \frac{3}{2}(p-1), \\ \sum_{i=0}^{(p-3)/2} \left\lfloor 2 \frac{n+i}{p-1} \right\rfloor, & n \geq \frac{3}{2}(p-1), p \equiv 1 (2), \\ \sum_{i=0}^{(p-4)/2} \left\lfloor 2 \frac{n+i-1}{p-2} \right\rfloor, & n \geq \frac{3}{2}(p-1), p \equiv 0 (2). \end{cases}$$

Закончим двумя открытыми задачами, первая из которых асимптотически уже решена, а во второй даже для получения асимптотического решения приходится обращаться к экстремальным характеристикам разбиений.

**Задача 4.** (а) Сколь мало ребер может иметь  $n$ -вершинный граф, у которого среди любых  $k$  вершин найдется  $t$  независимых ребер?

(б) Вычислить  $\mu(n; K_{p,q})$ . (Указание: см. задачу 2.)

Текст настоящего дополнения составлен по материалам следующих публикаций:

- [1] Баранов В. И. Комбинаторная модель явления фрагментации памяти. — Программирование, 1978, № 3, с. 46—52.
- [2] Баранов В. И. Одна экстремальная задача о разбиениях чисел. — Матем. заметки, т. 29, 1981, № 2, с. 303—306.
- [3] Стечкин Б. С. Экстремальные свойства разбиений чисел. — ДАН СССР, т. 264, 1982, № 4, с. 833—836.
- [4] Стечкин Б. С. Экстремальные свойства разбиений. — В кн.: Эндрюс Г. Теория разбиений. — М.: Наука, 1982, с. 249—253.
- [5] Стечкин Б. С., Франкл П. Локально-турановское свойство для  $k$ -графов. — Матем. заметки, т. 29, 1981, № 1, с. 83—94.
- [6] Стечкин Б. С., Франкл П. Локально-турановское свойство для  $k$ -графов. — Препринт МИАН ВНР, 1977, № 20, Будапешт.
- [7] Катона Д., Косточка А., Стечкин Б., О локально-гамильтоновых графах. — Препринт МИАН ВНР, 1982, Будапешт.
- [8] Комбинаторный анализ: задачи и упражнения/Под ред. К. А. Рыбникова. — М., Наука, 1982.
- [9] Erdős P., Simonovits M. A limit theorem in graph theory. Stud. Sci. Math. Hungar. Vol. 1, 1966, p. 51—57.
- [10] Стечкин Б. С. Вложимость разбиений. — Препринт МИАН ВНР, 1983, Будапешт



# Оглавление

О теории Рамсея . . . . .	5
Предисловие . . . . .	6
Введение . . . . .	7
Глава 1. Три взгляда на теорию Рамсея . . . . .	9
Глава 2. Теорема Рамсея . . . . .	12
Глава 3. Теорема ван дер Вардена . . . . .	17
Глава 4. Теорема Халеса — Джеветта . . . . .	23
Глава 5. Теорема Семереди . . . . .	28
Глава 6. Рамсеевская теория графов . . . . .	35
Глава 7. Евклидова теория Рамсея . . . . .	48
Глава 8. Общая теорема рамсеевского умножения . . . . .	59
Глава 9. Теоремы Шура, Фолкмана и Хиндмана . . . . .	61
Глава 10. Теорема Радо . . . . .	65
Глава 11. Современные вопросы теории . . . . .	69
Литература . . . . .	73
Дополнение I. Как было найдено доказательство гипотезы Баудета. Б. Л. ван дер Варден . . . . .	77
Дополнение II. Принцип полиого размещения. Б. С. Стечкин . . . . .	87